Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/V sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE

Exercice01 : $(2\,pts)$ Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C et tel que : $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Solution: soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

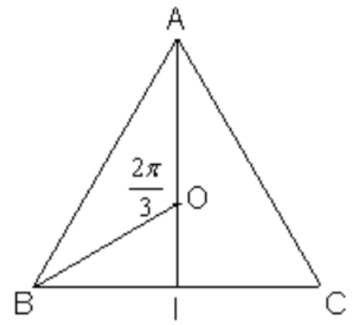
Equivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=\frac{3}{2}$

Exercice02 : $5,5\,pts(1,5\,pts\times 3+1\,pts)$ Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2 et de centre O

1) Calculer : a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

2) Montrer que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

Solution : 1) a) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos BAC=2\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

b) Calculons : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [AI] est aussi hauteur

Donc : d'après le théorème de Pythagore : $AI^2=AB^2-BI^2$

Donc : $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ et ainsi : $OA=\frac{2}{3}AI=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

On conclut donc que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\cos AOB=OA\times OB\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}$

C) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

On a : O étant le centre de gravité du triangle équilatéral, il est aussi centre du cercle circonscrit au Triangle, donc (BO) est la hauteur issue de B dans le triangle, donc est orthogonale à (AC)

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}=0$

2) Montrons que : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit scalaire, et la question précédente, on obtient : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}$

Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [BO] est aussi hauteur donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB}=0$

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}$

Exercice03 : $3,5pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB)

et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure.

2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC .

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$ 4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution :1) 2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ Donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : c'est-à-dire : $AB^2=64$ c'est-à-dire : $AB=8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ c'est-à-dire : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice04 : $4,5pts(1pts+0,5pts+1pts+1pts+0,5pts+0,5pts)$

On considère un rectangle $ABCD$ tel que : $AB=4$ et $AD=3$

Et soit E un point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) a) Calculer : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) En déduire : $\left\|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right\|$

2) Calculer : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

3) a) Calculer : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ b) En déduire : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

c) En utilisant la calculatrice : déduire une mesure de l'angle : $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Solution :1) a) Le point D est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD)

Par conséquent : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=9$

b) On sait d'après un théorème que : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$

Dans le triangle ADC rectangle en D on applique le théorème de Pythagore.

$AC^2=AD^2+DC^2=9+16=25$ Par conséquent : $9=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-AC^2-AD^2\right)$

On en déduit que : $18=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-9-25$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|^2=52$ Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{52}$

2) Calculons : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$: Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE)

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=AE\times AB$ car : $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times4=24$

3) a) Calculons : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+0+0+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2=\frac{3}{4}BA^2+AD^2=\frac{3}{4}\times4^2+3^2=\boxed{21}$$

b) On a : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=EC\times ED\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Dans le triangle EBC rectangle en B on applique le théorème de Pythagore :

$EC^2=EB^2+BC^2=4+9=13$ Donc : $EC=\sqrt{13}$

Dans le triangle AED rectangle en A on applique le théorème de Pythagore :

$ED^2=EA^2+AD^2=36+9=45$ Donc : $ED=\sqrt{45}$

On a donc : $21=\sqrt{13}\times\sqrt{45}\times\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)$

Donc : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{21}{\sqrt{13}\times\sqrt{45}}=\frac{21}{\sqrt{13\times45}}=\frac{21}{3\sqrt{13\times5}}=\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$

c) On a : $\cos\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{7\sqrt{65}}{65}$ la calculatrice donne : $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}\right)\simeq29,7^\circ$

Exercice05 : $4,5pts(1pts+1pts+1pts+1pts+0,5pts)$ A , B , C trois points du plan tel que B est le milieu du segment $[AC]$

Soit la droite (Δ) qui passe par A et différent de la droite (AB) et non perpendiculaire a (AB)

B' et C' les projections orthogonales respectivement des points B et C sur la droite (Δ)

I le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$

Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C'

1) Déterminer l'image du point B' par l'homothétie h et rapport k de l'homothétie h

2) a) Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BC'}$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie

c) Déterminer l'ensemble (F) des points I lorsqu'elle varie sur (Δ)

d) Faire une figure sachant que : $AB=4cm$

Solution :1) h l'homothétie de centre I et $h(B)=C'$

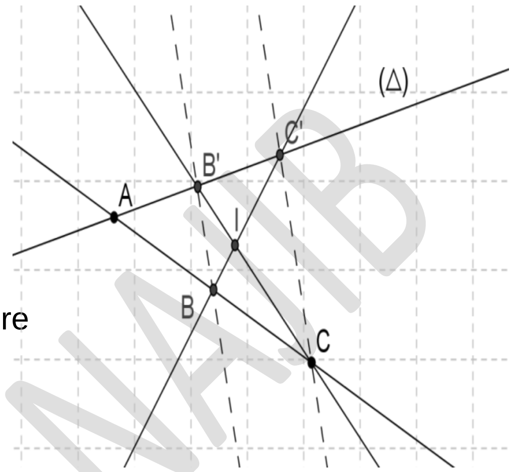
On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=k\overrightarrow{IB}$

Et puisque : $(BB')\parallel(CC')$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB'}$

Donc : $h(B')=C$

Donc : d'après la propriété caractéristique d'une homothétie on a $\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{B'B}$

Donc : $CC'=|k|B'B$ par suite : $\dfrac{CC'}{B'B}=|k|$



On considère le triangle ACC'

On a : B est le milieu du segment $[AC]$ et $(BB')\parallel(CC')$

Donc : B' est le milieu du segment $[AC']$ et $CC'=2B'B$

Par suite : $\dfrac{CC'}{B'B}=2$

Donc : $2=|k|$ et puisque : $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont le même sens contraire

Alors : $-2=k$

2)a) On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=-2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC'}=-2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{BC'}$ par suite : $\overrightarrow{IB}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $x=-\dfrac{1}{3}$

2)b) On a : $AC'C$ est un angle droit et A et C deux points fixes

Donc lorsque la droite (Δ) varie le point C' Varie su le cercle (Γ) de diamètre $[AC]$

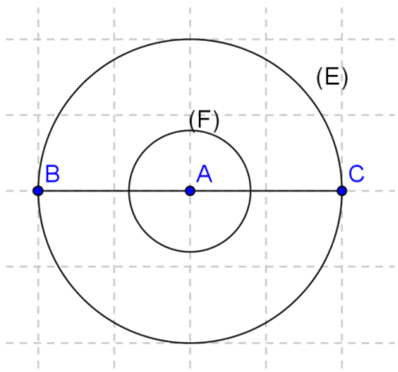
Mais le point C' est tel que : $C'\neq A$ et $C'\neq C$

Donc l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie est le (Γ) de diamètre $[AC]$ privé des points A et C

C'est-à-dire : $(E)=(\Gamma)-\{A;C\}$

2)c) On a : $\overrightarrow{IB}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

C'est-à-dire : I est l'image du point C' par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$



Donc lorsque le point C' varie su le cercle (Γ) alors le point I varie su le cercle (Γ') l'image du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$ privé des points A' et I tel que : $h'(A)=A'$

Et on a le rayon du cercle (Γ') est : $r'=\dfrac{1}{3}\times r$ avec r le rayon du cercle (Γ)

Le centre du cercle (Γ') est : l'image du centre du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

Par suite : $(F)=(\Gamma')-\{A';I\}$

d) La figure sachant que : $AB=4cm$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices q

devient un mathématicien