Cours avec Exercices d'application avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB
Tronc commun Sciences BIOF
http://www.xriadiat.com

Leçon : Equations et inéquations du second degré a une inconnue

Présentation globale
1) Inéquation du second degré a une inconnue
2) Equation du second degré a une inconnue.

1) Equation du second degré a une inconnue.

a) Définition : Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme : ax^2+bx+c.

Exemple : L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

b) Résolution d'une équation du second degré a une inconnue.

Activité : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$

3) $(x+2)^2=9$ 4) $5x^2-4x=0$ 5) $3x^2-x-2=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique)

Solution :1) L'équation : $x^2=16$

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{16}=4$ et. $x=-\sqrt{16}=-4$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2) L'équation : $x^2=-8$ -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $(x+2)^2=9$ On a alors $x+2=3$ ou . $x+2=-3$

L'équation admet deux solutions $x=1$et $x=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$: On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times 3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ Signifie que : $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Cas général : $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2\times a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$

$ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

On pose $\Delta=b^2-4ac$ et $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

Définitions : Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$.

- ✓ Le trinôme peut s'écrire sous la forme dite la forme canonique : $ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$
- ✓ On appelle d**iscriminan**t du trinôme : ax^2+bx+c , le nombre réel, noté $\Delta=b^2-4ac$.

Exemple : Pour le trinôme $3x^2-x-2$

a) Calculons le discriminant :a = 3, b = -1 et c = -2

Donc : Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 3 x (-2) = = 1 + 24= 25

b) Déterminons la forme canonique : $3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{25}{4\times 3^2}=-\frac{25}{36}$

La forme canonique est donc : : $3x^2-x-2=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$

Exercice01 : Déterminer la forme canonique du trinôme suivant : $5x^2+20x-65$

Solution : Pour écrire $5x^2+20x-65$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $5\left(x^2+4x-13\right)$

Puis on doit transformer : $x^2+4x-13$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2+4x-13$ (x^2 correspond à a² et $4x$ à 2ab)

Donc : $a=x$ et $2ab=4x$ c'est-à-dire : $b=2$.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-\ldots-13$

Si on développe $(x+2)^2$ on obtient x^2+4x+4

Pour avoir seulement x^2+4x on doit retrancher 4.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-4-13=(x+2)^2-17$

Donc : $5x^2+20x-65=5\left[(x+2)^2-17\right]$

Donc : $5x^2+20x-65=5(x+2)^2-85$: est la forme canonique de $5x^2+20x-65$

Propriété1 : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de L'équation $x^2=a$ (Dépendent du signe de : a)

- Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Démonstration :

- Si *a* < 0, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si *a* = 0, alors l'équation s'écrit $x^2=0$ donc $x=0$.
- Si a > 0 : $x^2=a$ équivaut à : $x^2-a=0$

Soit $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$

$x-\sqrt{a}=0 \quad ou \quad x+\sqrt{a}=0$

$x=\sqrt{a} \quad ou \quad x=-\sqrt{a}$

Propriété2 : Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$

Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta<0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$

Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c

- Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

c a d : $S=\{x_0\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

- Si $\Delta>0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est à dire : $S=\{x_1;x_2\}$

Et le trinôme : ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Démonstration : On a vu que le trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous sa forme canonique $ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

Donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta<0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$

Comme un carré ne peut être négatif $\left(\dfrac{\Delta}{4a^2}<0\right)$ l'équation n'a pas de solution.

- Si $\Delta=0$: $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

L'équation : $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Applications : Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution :a) Calculons le discriminant de l'équation : $2x^2-x-6=0$:a = 2, b = -1 et c = -6

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

Donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$ et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée :

$2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$ C'est à dire : $2x^2-x-6=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double):

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$ C'est à dire : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ a une forme factorisée :

$2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation : $x^2+3x+10=0$:a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle ; C'est à dire : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$ $\Delta=1+24=25$; $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ et $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Exercice02 : Factoriser les trinômes : a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution :a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4}=\frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2+19x-5=4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme : $9x^2-6x+1$:Calcul du discriminant : Δ = (-6) ^{2} – 4 x 9 x 1 = 0

Comme Δ = 0, le trinôme possède une seule racine (dite racine double) : $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 9}=\frac{1}{3}$:

et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée : $9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Exercice03 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique (ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60=np$ et $60=(n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2+3n-180=0$

Calcul du discriminant : Δ = 3 ^{2} +4 x 180 x 1 =729$\succ 0$

La solution est : $n_1=\frac{-3+\sqrt{729}}{2\times 1}=12$ et $n_2=\frac{-3-\sqrt{729}}{2\times 1}=-15$

Nous rejetons $n_2=-15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets

Exercice04: Résoudre dans ℝ l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$

Solution : On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est : Δ = $(-3)^2$ – 4 x 2 x (-2) = 25 et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$ et on a donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :Δ' = 13^2 – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

On a donc : $2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-6\,;-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$

C'est-à-dire : $x+6-x^2=0$ car $x\neq -\frac{1}{2}$ et $x\neq -6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est :Δ'' = 1^2 – 4 x (-1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x_1" = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 3$ et $x_2" = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3 donc $S = \{-2;3\}$

c)La somme et le produit des racines d'un trinôme.

Proposition1 : soit le trinôme ax^2+bx+c tel que son discriminant $\Delta > 0$

Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

<u>Exemple :</u> Soit le trinôme : $2024x^2 - 2025x + 1$

a) Vérifier que 1 est racine du trinôme

b) Trouver l'autre racine du trinôme

Solution :a) $2024\times 1^2 - 2025\times 1 + 1 = 2024 - 2025 + 1 = 2025 - 2025 = 0$ donc $x_1 = 1$

b) a = 2024, b = -2025 et c = 1

On a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $1\times x_2 = \frac{1}{2024}$ c'est-à-dire : $x_2 = \frac{1}{2024}$

Exercice05 : Soit le trinôme (E) : $P(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) $a = -3$: et et $b = \sqrt{3}$ et $c = 3$; $\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{3}^2 - 4\times(-3)\times 3 = 3 + 36 = 39$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha + \beta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha \times \beta = \frac{3}{-3} = -1$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2(-1) = \frac{3}{9} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} = -\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}$

Proposition2 : Le système : $(I)\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$ où les s, p sont des réels donnés admet une solution dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si : $s^2-4p\geq 0$ et dans ce cas x , y sont solutions de l'équation $x^2-sx+p=0$.

__Exemple :__ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$

Solution : Méthode1 : $\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=5-y\\(5-y)\times y=4\end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ ssi $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 1}=1$ et $y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 1}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Exercice06 : Donner une équation du second degré qui a pour solutions : $\alpha=1$ et $\beta=-2$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de l'équation : $x^2-sx+p=0$ avec : $\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$

On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(1+(-2))x+1\times(-2)=0$

C'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

d) Le discriminant réduit d'un trinôme.

Soit le trinôme : ax^2+bx+c

Si b est pair c a d $b=2b'$ on parle du discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ et on a :

- Si $\Delta' < 0$: pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
- Si $\Delta' = 0$: L'équation a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta' > 0$: L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Applications : Résoudre l'équation suivante : $x^2-22x-23=0$

Solution : on a : b = -22 et 22 est pair b = -2 x 11 donc b' = - 11

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation :

$\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$

Comme $\Delta' > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$

Donc : $S=\{-1;23\}$

Exercice07 : A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $2x^2-3x-2=0$
2) En déduire les solutions des équations suivantes :
a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ b) $2x^2-3|x|-2=0$ c) $2x^4-3x^2-2=0$ d) $2x^3-3x^2=2x$
B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$
2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $(E): x^2-|x-2|-4=0$

Solution : A)1) $2x^2-3x-2=0$
Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x-2=0$: a = 2, b = -3 et c = - 2
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

2) 2) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq 0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Equivalent à : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$
Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$
Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$ Equivalent à : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$
Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie : $x=2$ ou $x=-2$ par suite : $S=\{-1;1\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation :
$2X^2-3X-2=0$
Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ Equivalent à : $2x^3-3x^2-2x=0$
Equivalent à : $x\left(2x^2-3x-2\right)=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=2$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2};0;2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$: a = 1, b = 1 et c = - 6

Donc :Δ = b² – 4ac = 1² – 4 x 1 x (-6) = 25.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2

Donc Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 1 x (-2) = 9.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times1}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times1}=2$ Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : $(E):x^2-|x-2|-4=0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\geq2$ alors $x-2\geq0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$ c'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Or : d'après B) 1) $x_1=-1$ et $x_2=2$ mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec2$ alors $x-2\leq0$ donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$ c'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$ Or : d'après B) 1) $x_1=-3$ et $x_2=2$

Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$ Donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

2) Inéquation du second degré a une inconnue.

a) Définition : On pose : $P(x)=ax^2+bx+c$ $\quad a\neq0$

Une inéquation du second degré a une inconnue est une inéquation de la forme :

$P(x)\geq0$ ou $P(x)>0$ ou $P(x)\leq0$ ou $P(x)<0$

b) Signes du trinôme : ax^2+bx+c **.** $a\neq0$

Si Δ < 0 : On a vu que le trinôme : ax^2+bx+c avec $a\neq0$ peut s'écrire sous la forme :

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et puisque Δ < 0 c'est-à-dire : -Δ > 0

Alors : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

Et par suite : le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

Si $\Delta = 0$: On a : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et puisque $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ Alors le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a pour $x \neq \frac{-b}{2a}$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

- Si $\Delta > 0$: on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$		$x1$		$x2$		$+\infty$
$x-x1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-x2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x1)(x-x2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Résumé :

➢ Si $\Delta > 0$ le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a a l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de de a	

➢ Si $\Delta < 0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Si $\Delta = 0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $-5x^2+6x+8 \geq 0$

b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$ c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$ d) $-\frac{1}{2}x^2+x-4<0$

Solution : a) $-5x^2+6x+8 \geq 0$:Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2+6x+8=0$:

$a=-5$; $b=6$; $c=8$ Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$; Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = \left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4\times 2\times\sqrt{6} = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - 8\times\sqrt{6}$

$\Delta = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - 8\times\sqrt{6} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 8\sqrt{6}$

$\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 8\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta = \left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\sqrt{2};+\infty\right[$

c) $16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9} < 0$: Calculons le discriminant de l'équation $16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}$: $a = 16$; $b = -\frac{8}{3}$; $c = \frac{1}{9}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 4\times 16\times\frac{1}{9} = \frac{64}{9} - \frac{64}{9} = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{8}{3}}{2\times 16} = \frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$		$+$	0	$+$	

Donc : $S = \varnothing$

d) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 4 < 0$: Calculons le discriminant de l'équation $-\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$:

$a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = -4$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 1^2 - 4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 8 = -7 < 0$ et $a = -\frac{1}{2} < 0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$		$-$	

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice08 : Soit l'équation (E) : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ et soit Δ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

5) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : (E) : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

5) en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ or l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solutions

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$

Exercice09 : Résoudre les inéquations suivantes : 1) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ 2) $\dfrac{3x+9}{6x+2}\geq\dfrac{2x+1}{1-x}$

Solution : 1) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2 - x - 6 \neq 0$
On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :

$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 3$

Alors le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) Résolvons l'inéquation : $\dfrac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$ Signifie que : $\dfrac{1}{x^2 - x - 6} - 2 \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0$; On cherche les racines de: $-2x^2 + 2x + 13$

Le discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$

Donc : les racines de $-2x^2 + 2x + 13$ sont : $x_2' = \dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ et $x_1' = \dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$ est : $S = \left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2\right[\cup \left]3; \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

2) $\dfrac{3x+9}{6x+2} \geq \dfrac{2x+1}{1-x}$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes : $\dfrac{3x+9}{6x+2} \geq \dfrac{2x+1}{1-x}$ Signifie que : $\dfrac{3x+9}{6x+2} - \dfrac{2x+1}{1-x} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{(3x+9)(1-x)-(2x+1)(6x+2)}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{3x-3x^2+9-9x-12x^2-4x-6x-2}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{-15x^2-16x+7}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$ c'est-à-dire : $\dfrac{-(15x^2+16x-7)}{-(6x+2)(x-1)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)} \geq 0$

On cherche les racines de : $15x^2+16x-7$
Le discriminant est : $\Delta' = 16^2 - 4 \times (-7) \times 15 = 676 = 26^2$

Donc : les racines de $15x^2+16x-7$: $x_1 = \dfrac{-16+26}{2\times 15} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-16-26}{2\times 15} = \dfrac{-42}{30} = -\dfrac{7}{5}$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$15x^2+16x-7$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left]-\infty;-\frac{7}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right] \cup]1;+\infty]$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien