PROF: ATMANI NAJIB

COURS: LA DROITE DANS LE PLAN

Tronc commun Sciences

I. Repère du plan - Coordonnés d'un point - Coordonnées d'un vecteur

1. Repère du plan

Définition

Soient O,I et J trois points distincts non alignés.

On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$

- Le triplet $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ définie un repère du plan.
- Le point O s'appelle l'origine du repère.
- Le couple $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ s'appelle base du plan.
- La droite (OI) s'appelle l'axe des ***abscisses***.
- La droite (OJ) s'appelle l'axe des ***ordonnés***.
- Si $(OI)\perp(OJ)$ alors le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal.
- Si $(OI)\perp(OJ)$ et $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1u$ alors le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé

2. Coordonnées d'un point - coordonnées d'un vecteur

Activité

Dans un repère orthonormé du plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points suivants : $A(1;3)$; $B(-1;2)$ et $C(-2;-1)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
2) Calculer les distances suivantes : AB , AC et BC .
3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{BC}$.
4) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overrightarrow{AB}+(-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
5) Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$

a. Définitions et propriété

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.

* Soit M un point du plan. Il existe un seul couple (x,y) tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple (x,y) s'appelle couple de coordonnées du point M tel que x s'appelle abscisse du point M et y s'appelle ordonné du point M , et on écrit $M(x,y)$ ou $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

* Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un seul couple (x,y) tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple (x,y) s'appelle couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que x s'appelle abscisse du vecteur $\vec{u}$ et y s'appelle ordonné du point M , et on écrit $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

b. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Propriété :

Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur du plan et soit k un nombre réel.

La multiplication du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur $k\vec{u}$ qui a pour coordonnées $k\vec{u}(kx,ky)$.

c. Coordonnées d'une somme de deux vecteurs

Propriété :

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ qui a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$

Exemple :

On a $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(0;-1)$ donc $2\vec{u}(4;-6)$ et $\vec{u}+\vec{v}(2;-4)$

d. Propriété :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
- Si le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exemple

On considère les points $A(3;1)$, $B(-1;2)$ et soit I le milieu $[AB]$

- Les coordonnées : on a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(-4;1)$
- Les coordonnées du point I : on a $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$
- La distance AB : on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ donc $AB=\sqrt{17}$

e. Egalité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$. On écrit $\vec{u}=\vec{v}$.

Application : Soient $\vec{u}(3x+1;2)$ et $\vec{v}(4;y-3)$ deux vecteurs. Déterminer x et y pour que $\vec{u}=\vec{v}$.

Dans la suite ; le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

II. Colinéarité de deux vecteurs

1. Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

Le nombre réel $xy'-x'y$ s'appelle le ***déterminant*** de vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$, se note $\det(\vec{u},\vec{v})$ tel que

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$$

Exemple

On considère les vecteurs suivants : $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(3;4)$

- $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-3\times3=-1$
- $\det(\vec{v},\vec{u})=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3\times3-2\times4=1=-\det(\vec{u},\vec{v})$
- $\det(2\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=4\times4-6\times3=-2=2\det(\vec{u},\vec{v})$.

Remarque :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre réel on a :

- $\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})$
- $\det(k\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{u},k\vec{v}) = k \times \det(\vec{u},\vec{v})$

2. *Colinéarité de deux vecteurs*

Propriété :

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Exemple

On a $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}\left(-1;\frac{-3}{2}\right)$ donc $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2\times\left(\frac{-3}{2}\right) - 3\times(-1) = -3+3 = 0$

Or on a $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$; par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Application

1) On considère les points suivants : $A(1;-8)$, $B(11;7)$, $C(5;-1)$ et $D(7;2)$

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Etudier l'alignement des points E, F et G dans les cas suivants :
   - i) $E(-4;2)$, $F(5;1)$ et $G(11;3)$
   - ii) $E(-2;3)$, $F(0;-1)$ et $G(-1;1)$.

III. *Etude analytique d'une droite*

1. *Vecteur directeur d'une droite*

Définition

Soit (D) une droite qui passe par deux points distincts A et B .On appelle ***vecteur directeur*** de la droite (D) tout vecteur qui est colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

Etant donné une droite (D) d'équation réduite suivante : $(D): y = -x+1$

On remarque que la droite (D) passe par les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$ par conséquent le vecteur $\overrightarrow{AB}(-1;1)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Remarque

Si une droite (D) passe par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ alors on écrit $D(A,\vec{u})$

2. *Equation cartésienne d'une droite*

Activité :

Dans le plan on considère les points $A(3;1)$, $B(-1;2)$ et soit $M(x,y)$ un point de la droite (AB) .

1) Que peut dire sur la colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$
2) Déduire $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$
3) Exprimer $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$ en fonction de x et y .

Définition :

Soient a,b et c des nombres réels où $(a,b) \neq (0,0)$

Toute droite du plan admet une équation de forme $ax+by+c=0$.

L'équation $ax+by+c=0$ s'appelle ***une équation cartésienne*** d'une droite.

Propriété :

L'ensemble de point $M(x,y)$ du plan qui vérifient $ax+by+c=0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b,a)$.

Remarque

Soit (D) une droite passe par un point $A(x_A;y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(-b,a)$ et $M(x,y)$ un point du plan.

$M\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

Exemple

On considère les points suivants $A(-3;1)$ et $B(-1;4)$

Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB)

$M\in D(A,\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow 3(x+3)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+11=0$

D'où $(AB):3x-2y+11=0$ est une équation cartésienne de droite (AB).

Application

Déterminer une équation cartésienne de la droite $D(A,\vec{u})$ telle que $A(-2;3)$ et $\vec{u}(-1;3)$.

Déterminer une équation cartésienne de le droite (BC) telle que : $B(-2;1)$ et $C(-3;2)$

3. Représentation paramétrique d'une droite :

Activité

Soit (D) une droite passe par un point $A(2;1)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(3,-2)$ et $M(x,y)\in(D)$.

1) Montrer qu'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$
2) Déduire les coordonnées du point M en fonction de t.

Définition

Soient $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha,\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \end{cases} \ / t\in\mathbb{R}$ s'appelle ***représentation paramétrique*** d'une droite passe par le point $A(x_A;y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

Exemple :

Soit (D) une droite passe le point $A(2;-1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1;3)$.

Le système $(D):\begin{cases} x=2-1t \\ y=-1+3t \end{cases} \ / t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

Remarque :

Toute droite du plan admet une infinité de représentation paramétrique.

Application :

Soient $A(3;-2)$ et $B(5;4)$ deux points du plan.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)
2) Le point $C(4;-1)$ appartient-il à la droite (AB).
3) Donner une équation cartésienne de la droite $(D):\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-1+2t \end{cases} \ / t\in\mathbb{R}$

IV. Positions relatives de deux droites définies par ses équations cartésiennes.

Propriété

Soient (D) et (D') deux droites du plan définies par ses équations cartésienne telles que $(D):ax+by+c=0$ et $(D'):a'x+b'y+c'=0$.

* ***Parallèles*** $((D)//(D'))$ si et seulement si $ab'-a'b=0$

* ***Sécantes*** si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$ et en particulier (D) et (D') sont ***Orthogonales*** $((D)\perp(D'))$ si et seulement si $aa'+bb'=0$

Exemple

Soient (D) et (D') deux droites telles que : $(D):3x-y-1=0$ et $(D'):-2x+\frac{2}{3}y+1=0$.

Etudions la position relative de (D) et (D')

On a $3\times\frac{2}{3}-(-1)\times(-2)=2-2=0$ donc $(D)//(D')$.

Application

Etudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :

- $(D):6x-2y+3=0$;; $(D'):2x-\frac{1}{3}y-1=0$
- $(D):x+2y-3=0$;; $(D'):-x-2y+4=0$
- $(D):5x-3y+2=0$;; $(D'):2x-3y-5=0$
- $(D):-2x-y+2=0$;; $(D'):\frac{1}{2}x-y-7=0$

Prof : Mouad Zillou Niveau : Tronc commun sciences	La droite dans le plan	Lycée : Charif El Idrissi –Assoul- Matière : Mathématiques

Exercice 01

on considère les points suivants : $A(1;3)$; $B(-1;2)$ et $C(-2;-1)$.

6) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
7) Calculer les distances suivantes : AB, AC et BC.
8) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{BC}$.
9) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overrightarrow{AB}+(-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
10) Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$.
11) Soient $\vec{u}(3x+1;2)$ et $\vec{v}(4;y-3)$ deux vecteurs. Déterminer x et y pour que $\vec{u}=\vec{v}$.

Exercice 02

1) soient $\vec{u}(-1;2);\vec{v}(-4;1)$ et $\vec{w}(2m-3;2)$ / $(m\in\mathbb{R})$ trois vecteurs du plan.
   a) Etudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
   b) Déterminer la valeur du nombre m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
   c) Déterminer la valeur du nombre m pour que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
2) On considère les points suivants: $A(1;-8)$; $B(11;7)$ $C(5;-1)$ et $D(7;2)$.

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

3) Etudier l'alignement des points E,F et G dans les cas suivants :
   i) $E(-4;2)$; $F(5;1)$ et $G(11;3)$
   ii) $E(-2;3)$, $F(0;-1)$ et $G(-1;1)$.

Exercice 03

On considère les points suivants: $A(-1;2)$; $B(2;-1)$; $C(1;3)$; $D(-2;-3)$ et $E(0;1)$

1) Montrer que $(AC)//(BD)$.
2) Soient I et J les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ respectivement.

Montrer que les $E;I$ et J sont alignés.

Exercice 04

1) Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ dans les cas suivants :

$a)$ $A(-2;0);\vec{u}(-1;2)$; $b)$ $A(1;4);\vec{u}(2;3)$

2) Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (AB) dans les cas suivants

$a)$ $A(-1;3);B(1;-2)$; $b)$ $A(2;-1);B(-2;0)$

Exercice 05

Soient $A(3;-2)$ et $B(5;4)$ deux points du plan.

4) Déterminer une représentation paramétrique de (AB)
5) Le point $C(4;-1)$ appartient-il à la droite (AB).
6) Donner une équation cartésienne de la droite

$$(D):\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-1+2t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$$

Exercice 06

On considère les points $A(3;2)$ et $B(2;-1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $(D):3x-y+6=0$

1) Montrer que $(AB)//(D)$.
2) Donner une équation cartésienne de la droite (D') passant par A et dirigées par le vecteur $\vec{u}(4;-1)$.
3) Montrer que (D) et (D') sont sécantes en $E(-1;3)$
4) Soit $F(a;0)$ un point du plan

Déterminer le nombre a pour que le quadrilatère $ABFE$ soit un parallélogramme.

Exercice 07

Etudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :

- $(D):6x-2y+3=0$;; $(D'):2x-\frac{1}{3}y-1=0$
- $(D):x+2y-3=0$;; $(D'):-x-2y+4=0$
- $(D):5x-3y+2=0$;; $(D'):2x-3y-5=0$
- $(D):-2x-y+2=0$;; $(D'):\frac{1}{2}x-y-7=0$