L'ordre dans $\mathbb{R}$

I. Ordre et opérations

1. Ordre

Activité

1) Comparer $3\sqrt{3}$ et $1+3\sqrt{2}$
2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$
   a) Montrer que $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
   b) Comparer $\dfrac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2+1}-x$.

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

- Si $a\le b$ alors $(a-b)\le 0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}^-$
- Si $a<b$ alors $(a-b)<0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}_-^*$
- Si $a\ge b$ alors $(a-b)\ge 0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}^+$
- Si $a>b$ alors $(a-b)>0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$

Application

1) Comparer a et b dans les cas suivants :
   i. $a=\sqrt{4n^2+1}$; $b=2n+1$ $n\in\mathbb{N}$
   ii. $a=\dfrac{7x+2y}{7x}$; $b=\dfrac{8y}{7x+2y}$ $\left(x\in\mathbb{R}_+^*;y\in\mathbb{R}_+^*\right)$
2) Soient x et y deux nombres réels tels que $x\le y\le 3$
   i. Montrer que $x+y-6\le 0$
   ii. Comparer x^2-6x+1 et y^2-6y+1

Propriétés :

Soient a,b,c et d des nombres réels.

* Si $a\le b$ alors $a+c\le b+c$.
* Si $a\le b$ et $c\le d$ alors $a+c\le b+d$.
* Si $a\le b$ et $c>0$ alors $ac\le bc$.
* Si $a\le b$ et $c<0$ alors $ac\ge bc$.
* Si $0\le a\le b$ et $0\le c\le d$ alors $a\times c\le b\times d$.
* Si $0<a\le b$ alors $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$
* Si $0<a\le b$ alors $a^2\le b^2$.
* Si $a\le b<0$ alors $a^2\ge b^2$.
* Si a et b ont même signe et $a\le b$ alors on a $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b};(a\ne 0;b\ne 0)$.

Exemples :

- $a\le\frac{5}{7}$ *et* $b\le\frac{9}{7}$ *alors* $a+b\le 2$
- $-4\le -2$ *Alors* ''$(-12\le -6$ *car* $3>0)$; $(8\ge 4$ *car* $-2<0)$''
- $1<\frac{3}{2}$ *et* $\frac{1}{2}<2$ *alors* $1\times\frac{1}{2}<3$
- $-5\le -\frac{1}{2}$ *Alors* $\frac{1}{-5}\ge -2$
- $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ *Alors* $3>2$

- $2 \leq \sqrt{5}$ *Alors* $2^2 \leq \sqrt{5}^2$
- $-4 < -3$ *Alors* $(-4)^2 > (-3)^2$

2. Encadrement :

Définition

Soient a , b et x deux nombres réels tels que $a < b$
Chaque double inégalité parmi, ces doubles inégalités suivantes $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x < b$ est appelée ***encadrement*** de x d'amplitude $b - a$.

Exemple :

$3.13 \leq \pi \leq 3.14$ est un encadrement π de et d'amplitude $3.14 - 3.13 = 0.01$.

Propriété

Soient a, b, c , d , x et y des nombres réels.

* Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$
* a, b, c et d des nombres réels positifs ; Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$.
* a, b, c et d des nombres réels négatifs ; Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $b \times d \leq x \times y \leq a \times c$.
* a et b des nombres réels positifs ; Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$.
* a et b des nombres réels négatifs ; Si $a \leq x \leq b$ alors $b^2 \leq x^2 \leq a^2$
* a, b, c et d des nombres réels ont même signe si alors $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$.

Application

On considère les nombres réels x, y et z tels que :

$2 \leq x \leq 4$; $-3 \leq y \leq 1$; $-1,5 \leq z \leq -0,5$

Trouver un encadrement des nombres suivants :

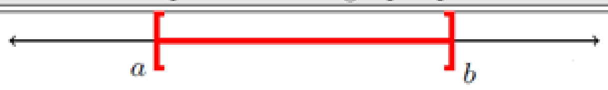
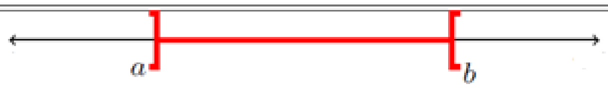
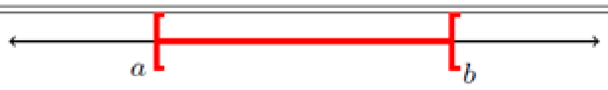
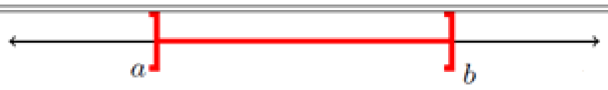
$x - y$; $x \times y$; $x^2 + y^2 + z^2$; $\frac{x+2}{z}$.

II. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

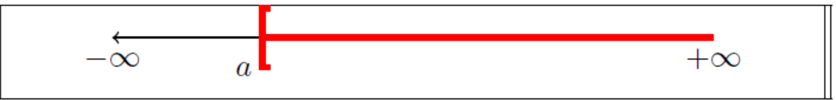
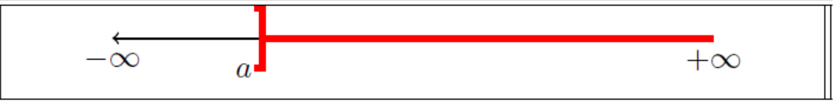
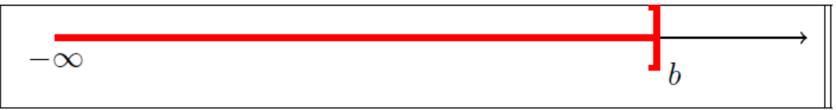
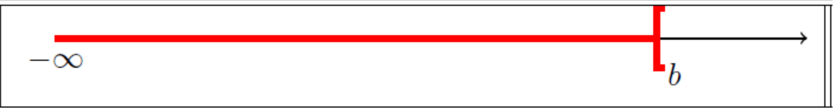
1. Intervalles bornés

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;b]$ intervalle fermé	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	
$[a;b[$ intervalle semi-ouvert (ouvert en b)	$a \leq x < b$	
$]a;b]$ intervalle semi-ouvert (ouvert en a)	$a < x \leq b$	

2. Intervalles non bornés

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles non bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Remarque :

- $+\infty$ (Plus l'infinie) et $-\infty$ (moins l'infinie) ne sont pas des nombres ce sont des symboles.
- Par convention le **crochet «]»** au voisinage de ∞ est ***toujours ouvert***.
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$; $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\varnothing$.

Exemples

• $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 7\}$ Équivaut à $x \in [-3;7]$. • $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 6\}$ Équivaut à $x \in]2;6]$	• $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$ Équivaut à $x \in [2;+\infty[$. • $\{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$ Équivaut à $x \in]-2;+\infty[$.

• $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 3\}$ **Équivaut à** $x \in]-4;3[$. • $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 4\}$ **Équivaut à** $x \in [-1;4[$	• $\{x \in \mathbb{R} / x < -5\}$ **Équivaut à** $x \in]-\infty;-5[$. • $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -3\}$ **Équivaut à** $x \in]-\infty;-3]$

3. ***Intersection et réunion de deux intervalles :***

Définition :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

l'intersection des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I ***et*** appartient J et se note $I \cap J$. ($\cap$ se lit ***inter***).

La réunion des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I ***ou*** appartient J et se note $I \cup J$. ($\cup$ se lit ***union***).

Autrement dit :

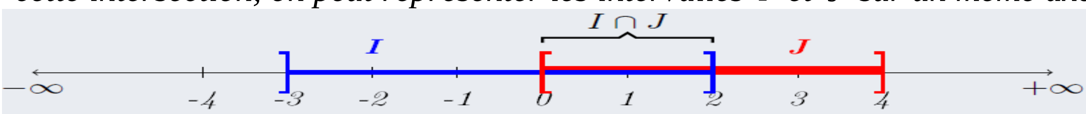
$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I\_et\_x \in J\}.$$

$$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I\_ou\_x \in J\}.$$

Exemples :

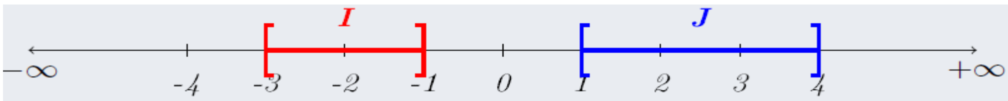
* *Déterminons* $I \cap J$ *avec* $I =]-3;2]$ *et* $J = [0;4]$.

Pour visualiser cette intersection, on peut représenter les intervalles I *et* J *sur un même axe gradué.*



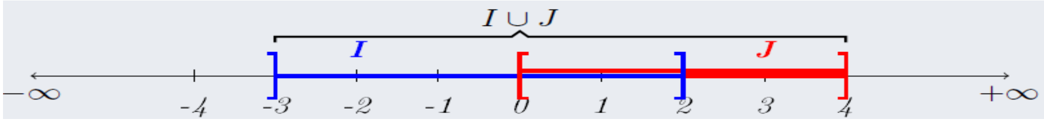
L'intersection des deux intervalles est la zone de l'axe gradué où les deux couleurs se superposent. Ainsi $I \cap J = [0;2]$.

* *Déterminons* $I \cap J$ *avec* $I = [-3;-1]$ *et* $J = [1;4]$.



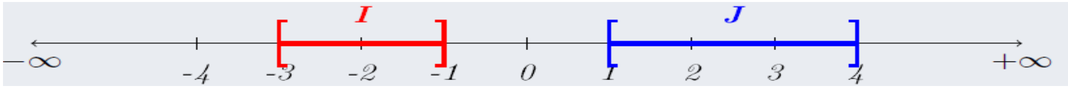
$I \cap J = \varnothing$, *car les ensembles* I *et* J *n'ont pas de zone en commun.*

- ✱ *Déterminons* $I\cup J$ *avec* $I=\left]-3;2\right]$ *et* $J=[0;4]$.



Les nombres de la réunion sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux intervalles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I *soit par l'intervalle* J. *Ainsi* $I\cup J=\left]-3;4\right]$
.

- ✱ *Déterminons* $I\cup J$ *avec* $I=[-3;-1]$ *et* $J=[1;4]$.



$I\cup J=[-3;-1]\cup[1;4]$.

Application :

Déterminer l'intersection et la réunion de I et J dans les cas suivants :

✱ $I=[-10;2]$ et $J=[-3;7]$ ✱ $I=\left]-\infty;3\right]$ et $J=\left[-6;+\infty\right[$ ✱ $I=\left[7;+\infty\right[$ et $J=\left[-5;+\infty\right[$	✱ $I=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{5}\right]$ et $J=\left[\frac{5}{7};1\right]$ ✱ $I=\left]-\infty;-\frac{5}{4}\right]$ et $J=\left]-\frac{4}{3};+\infty\right]$

4. ***Définitions***

Soit $I=[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a<b$ on a :

- •L'amplitude de I est le nombre réel A tel que $A=b-a$
- •Centre de I est le nombre réel C tel que $C=\dfrac{a+b}{2}$
- •Rayon de I est le nombre réel R tel que : $R=\dfrac{b-a}{2}$

Remarque

La définition précédente est valable pour les intervalles de forme $\left[a;b\right[$, $\left]a;b\right]$ et $\left]a;b\right[$

Exemple

On considère l'intervalle suivant : $I=[-1;3]$ on a :

- ✓ L'amplitude de I est $A=3-(-1)=4$.
- ✓ Le rayon de I est : $R=\dfrac{3-(-1)}{2}=2$.
- ✓ Le centre de I est : $C=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$.

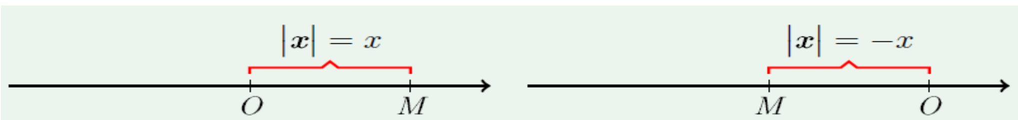
III. Valeur absolue

Activité :

1) Placer sur un axe gradué les points suivants : $A(-1), B(3), C(1)$ et $D(5)$
2) Calculer les distances suivantes : AB, AC, BC et AD.

1. *Définition*

Soit x un réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels d'origine O .
La valeur absolue de x est la distance OM et se note $|x|$ telle que $|x|=OM$.



Remarque :

Soit x un nombre réel on a

- ○ $|x|=x$ Si $x\geq 0$
- ○ $|x|\geq 0$ (Toujours positif)
- ○ $|x|=-x$ Si $x\leq 0$
- ○ $-|x|\leq x\leq|x|$

Exemple :

$|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$ Car $2-\sqrt{3}$ est positif.

$|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3)=3-\sqrt{5}$, car $\sqrt{5}-3$ est négatif.

$|x-1|=x-1$ si $x\geq 1$ et $|x-1|=1-x$ si $x\leq 1$.

* 2. Distance entre deux réels.

Soient a et b deux nombres réels

A et B deux points de la droite graduée d'abscisses a et b respectivement.

La distance entre a et b est la valeur absolue de leur différence : $AB=|a-b|=|b-a|$.

3. Propriété :

Soient x et y deux nombres réels on a :

- $|x|=|-x|$; $|x-y|=|y-x|$
- $\sqrt{x^2}=|x|$; $|x^2|=|x|^2=x^2$
- $|x+y|\leq|x|+|y|$
- $|x\times y|=|x|\times|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|};(y\neq 0)$
- $|x|=a$ Si et seulement si $x=a$ ou $x=-a$. (Avec $a\geq 0$)
- $|x|=|y|$ Si et seulement si $x=y$ ou $x=-y$.

Exemples:

On prend $x=4$ et $y=-3$

On a $|4+(-3)|=4-3=1$ et $|4|+|-3|=4+3=7$ donc $|4+(-3)|\leq|4|+|-3|$

On a $|4\times(-3)|=|-12|=12$ et $|4|\times|-3|=4\times 3=12$ donc $|4\times(-3)|=|4|\times|-3|$

On a $\left|\frac{4}{-3}\right|=\frac{4}{3}$ et $\frac{|4|}{|-3|}=\frac{4}{3}$ donc $\left|\frac{4}{-3}\right|=\frac{|4|}{|-3|}$

Application

Résoudre les équations suivantes :

$\|x-3\|=2$	$\|4-3x\|=5$	$\|2x-1\|=\|3x+4\|$	$\|x+3\|=-2$	$\|x+5\|+\|-2x+1\|=0$

4. Valeur absolue et intervalles

Propriété :

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.

* $|x|\leq r$ si et seulement si $-r\leq x\leq r$. (C.à.d. $x\in[-r;r]$).
* $|x|\geq r$ si et seulement si $x\leq -r$ ou $x\geq r$. (C.à.d. $x\in]-\infty;-r]\cup[r;+\infty[$).
* $r_1\leq|x|\leq r_2$ si et seulement si $r_1\leq x\leq r_2$ ou $r_1\leq -x\leq r_2$.

Exemples :

On a $|x-2|\leq\frac{3}{4}$ signifié que $-\frac{3}{4}\leq x-2\leq\frac{3}{4}$

Signifie que $-\frac{3}{4}+2\leq x\leq\frac{3}{4}+2$ alors $\frac{5}{4}\leq x\leq\frac{11}{4}$ D'où $x\in\left[\frac{5}{4};\frac{11}{4}\right]$.

On a $|2x-1|>3$ signifié que $2x-1<-3$ ou $2x-1>3$

Signifie que $2x<-3+1$ ou $2x>3+1$

Signifie que $2x<-2$ ou $2x>4$ alors $x<-1$ ou $x>2$

d'ou $x\in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$.

IV. Approximations – Approximations décimales

1. Approximation par excès -- Approximation par défaut

Définition :

Soit x un réel tel que $a \le x \le b$ ou $a < x \le b$ ou $a \le x < b$ ou $a < x < b$.

- Le réel a est appelé une ***valeur approchée par défaut*** de x à $b-a$ près.
- Le réel b est appelé une ***valeur approchée par excès*** de x à $b-a$ près.

Exemple :

On a $1,732 < \sqrt{3} < 1.733$ donc

- $1,733$ est une approximation par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés (A= $1,733 - 1,732 = 0.001 = 10^{-3}$)
- $1,733$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés.

2. Valeur approchée

Définition

Soient x, a et r trois réels, r est positif.
Si $|x - \mathrm{a}| \le \mathrm{r}$ ou $|x - a| < r$, on dit que a est une ***valeur approchée*** de x à r près.

Exemple

On a $|\sqrt{2} - 1,41| \le 0,01$ donc $1,41$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $0,01$ près.

Remarque

Si $a \le x \le b$ alors **:**

✓ $\dfrac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\dfrac{b-a}{2}$ près.

✓ Tout nombre réel dans $[a;b]$ est une valeur approchée de x à $b-a$ prés.

Exemple :

On a $2,236 \le \sqrt{5} \le 2.237$

Donc $\dfrac{2,236 + 2.237}{2} = 2.2365$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $\dfrac{2,237 - 2,236}{2} = 5 \times 10^{-4}$ prés.

3. Approximation décimale

Définition

Soit x un nombre réel et N est un entier relatif alors il existe un entier naturel p tel que
$N \times 10^{-p} \le x \le (\mathrm{N}+1) \times 10^{-p}$.

Le nombre décimal $N \times 10^{-p}$ est dit approximation décimale par défaut de x à 10^{-p}.

Le nombre décimal $(N+1) \times 10^{-p}$ est dit approximation décimale par excès de x à 10^{-p}.

Exemple :

On a $1,414 \le \sqrt{2} \le 1,415$ signifié que $1414 \times 10^{-3} \le \sqrt{2} \le 1415 \times 10^{-3}$

C'est à dire $1414 \times 10^{-3} \le \sqrt{2} \le (1414+1) \times 10^{-3}$.

d'où 1414×10^{-3} est une approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} et $(1414+1) \times 10^{-3}$ est une approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}.

Application :

On considère le nombre suivant : $A = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ sachant que $1,73 \le \sqrt{3} \le 1,74$ et $2,64 \le \sqrt{3} \le 2,65$

Donner l'approximation décimale par défaut et par excès de A à 10^{-2} prés.