I. Définition d'un polynôme –égalité de deux polynômes –opérations sur les polynômes

Activité

Soit un parallélépipède dont les dimensions sont $x, x+3$ et $x+5$ avec x est un réel. Calculer $V(x)$ le volume du parallélépipède.

Réponse :

$V(x) = x(x+3)(x+5)$

$= x^3 + 8x^2 + 15x$

L'expression $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ *s'appelle* ***polynôme (ou fonction polynôme)*** *de degré 3 et on écrit* $\deg(v(x)) = 3$ *ou* $d°v = 3$

1. Définition d'un polynôme

On appelle polynôme (ou fonction polynôme) ,se note souvent P ,une expression (ou fonction) de la forme : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$

Où $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ sont des nombres réels et s'appellent les **coefficients** du polynôme P.

Si $a_n \neq 0$ alors n s'appelle le degré du polynôme P et se note $d°P$ tel que $d°P = n$

Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme P s'appelle le polynôme nul (sans degré) .

Exemple :

On considère l'expression suivante $P(x) = -5x^4 + 3x^2 + 4x - 7$

$P(x)$ est un polynôme de degré 4 ; on écrit $d°P = 4$

Les nombres réels $-5,\ 0, 3,\ 4, -7$ sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire $P(x)$ sous forme $P(x) = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 4x - 7$.

Remarque :

Soit a un nombre réel non nul.

'' $P(x) = ax + b$ ''est le polynôme de degré 1 s'appelle binôme.

'' $P(x) = ax^2 + bx + c$ ''est un polynôme de degré 2 s'appelle trinôme.

Exemple :

$P(x) = 2x - 3$ est un binôme. // $P(x) = -3x^2 + 2x + 4$ est un trinôme.

Application :

1) Donner l'expression d'un polynôme $P(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1, 0, 0,-3,1 et 2.
2) Parmi les expressions suivantes, préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré.

$$P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 3 \quad ; \quad Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x} \quad ; \quad R(x) = 5|x|^2 + 4|x| - 5 \ ;$$

$$S(x) = (a-1)x^4 + x + 1; (a \in \mathbb{R})$$

2. Egalité de deux polynômes

Propriété :

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ Sont **égaux** si et seulement si :

- Ils ont même degré
- Les coefficients des termes en même degré sont deux à deux égaux .

Signifier que : si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$

Alors $\begin{cases} d°P = d°Q \Leftrightarrow n = m \\ a_n = b_m; a_{n-1} = b_{m-1}; ....; a_0 = b_0 \end{cases}$

Exemple

Etudions l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ Et $Q(x)=3x^2+x^3-4x+1+3x^3$

$$\begin{cases} d°p = d°Q = 3 \\ \text{les termes de même degré ont mêmes coefficients} \end{cases}$$

Alors $P(x)=Q(x)$

Application

1) Etudier l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans les cas suivants :

   a) $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$; $Q(x)=(x+1)^3$

   b) $P(x)=x^3+(x-1)^2$; $Q(x)=x^2-3x+4$

   c) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$; $Q(x)=x^2(3x-2)+x$

2) Déterminer le nombre réel a pour que $P(x)=Q(x)$

$P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$; $Q(x)=x^3+4x^2+(3+a)x+3a$

3) Déterminer a et b et c et d pour que $P(x)=Q(x)$

$P(x)=ax^3+(b-2)x^2+(4-c)x+d$; $Q(x)=-3x^3+x^2+7$

3. Operations sur les polynômes

a. Somme de deux polynômes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

La somme de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P+Q$ tel que : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$

Exemples :

- On a : $P(x)=x^4-x^3+2x^2-1$ et $Q(x)=3x^3-2x^2+2x-4$

Donc $P(x)+Q(x)=x^4+2x^3+2x-5$

- On a $P(x)=2x^2+3x+4$ et $Q(x)=-2x^2+x-1$

Donc $P(x)+Q(x)=4x+3$

Remarque :

Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls et $P+Q$ un polynôme non nul alors on a

$d°(P+Q)\le d°P$ OU $d°(P+Q)\le d°Q$

b. Produit de deux polynômes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

Le produit de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P\times Q$ tel que $(P\times Q)(x)=P(x)\times Q(x)$

Exemple :

On a $P(x)=x^2+1$ et $Q(x)=x-1$

Donc $P(x)\times Q(x)=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$

Remarque :

Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls, alors on a $d°(P\times Q)=d°P+d°Q$

Application

On considère les deux polynômes suivants

$f(x)=2x^2+3x-2$ et $g(x)=x^3-x^2+1$

Calculer les expressions suivantes

$A(x)=2f(x)-3g(x)$; $B(x)=f(x)\times g(x)$; $C(x)=\left(f(x)\right)^2$ et $D(x)=\left(g(x)\right)^2$

II. La divisions par $x-\alpha$

1. La division euclidienne d’un polynôme par $x-\alpha$

PROF: ATMANI NAJIB
Tronc commun sciences

a. Définition et propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

S’il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifié : $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$; alors :

- $Q(x)$: S’appelle **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.
- $P(\alpha)$: S’appelle reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.

Exemple $P(x)=x^2-8$, $x-\alpha=x-3$

On a $P(x)=(x-3)(x+3)+1$

Donc : $x+3$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

1: est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$.

b. Racine d’un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}$

On dit que α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha)=0$

Exemple

Parmi les nombres suivants déterminons qui sont les racines de $P(x)$

$P(x)=x^2-2x+1$ / 1, -2 et 3

c. La division euclidienne de $P(x)$ sur $x-\alpha$

Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$,on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels.

Exemple

Effectuons la division euclidienne de $P(x)=2x^3+x^2-x+1$ par $x+1$

2. La divisibilité par $x-\alpha$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}$ avec $d°P=n$

- Ont dit que $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$, s’il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
- $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ si et seulement si α est un zéro ou racine de $P(x)$

Exemple

On considère le polynôme suivant : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

Etudier la divisibilité de $P(x)$ par $x-1$.