Cours avec Exercices Avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB
Tronc commun Sciences BIOF
http:// www.xriadiat. com

TRIGONOMÉTRIE2

Leçon : Les équations et inéquations trigonométriques

Présentation globale

I) Les équations trigonométriques élémentaires
II) Les inéquations trigonométriques élémentaires.

I) Les équations trigonométriques élémentaires

1) Equation: $\cos x = a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$.

Si $a = -1$ alors on a l'équation $\cos x = -1$

On sait que : $\cos \pi = -1$ donc tous les réels de la forme : $\pi + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $a = 1$ alors on a l'équation $\cos x = 1$:

On sait que : $\cos 0 = 1$ donc tous les réels de la forme : $0 + 2k\pi$ avec k un nombre relatif sont solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $-1 < a < 1$ réels alors on a l'équation $\cos x = a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $]0\,;\pi]$ tel que $\cos x = \cos \alpha$ et alors on a :

$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{6} < 2k\pi \le \pi - \frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{6} < 2k\pi \le \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{6} < 2k \le \frac{5}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-0,5... \le k \le 0,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < -\frac{1}{6} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{1}{6} < 2k \le 1 + \frac{1}{6}$

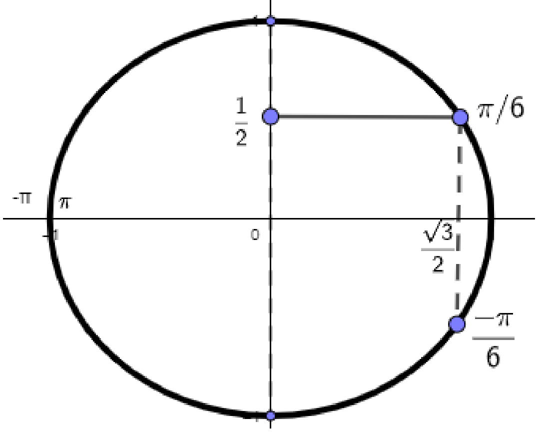
Donc : $-\frac{5}{6} < 2k \leq \frac{7}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12} < k \leq \frac{7}{12}$

Donc $-0,... \leq k \leq 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\times 0\times \pi = -\frac{\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice 01 : Résoudre dans $[0,2\pi]$de l'équation : $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{7}$

Solution : $\cos 3x = -\cos\frac{\pi}{7}$ Équivaut à : $\cos 3x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $\cos 3x = \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $3x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{6\pi}{7} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$

a) Encadrement de : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq \frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$

Donc : $0 \leq \frac{2}{7} + \frac{2k}{3} \leq 2$ c'est-à-dire : $0 - \frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq 2 - \frac{2}{7}$

Donc : $-\frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \leq \frac{12}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{7} < 2k \leq \frac{36}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{7} < k \leq \frac{18}{7}$

Donc $-0,4... \leq k \leq 2,5...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$on remplace on trouve :

Si $k=0$ alors : $x = \frac{2\pi}{7}$

Si $k=1$ alors : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x = \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{3} = \frac{34\pi}{21}$

b) Encadrement de : $x = -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3}$: $0 \leq -\frac{2\pi}{7} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$

Donc : $0 \le -\frac{2}{7}+\frac{2k}{3} \le 2$ c'est-à-dire : $0+\frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \le 2+\frac{2}{7}$

Donc : $\frac{2}{7} < \frac{2k}{3} \le \frac{16}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{6}{7} < 2k \le \frac{48}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{3}{7} < k \le \frac{24}{7}$

Donc $0,4... \le k \le 3,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$on remplace on trouve :

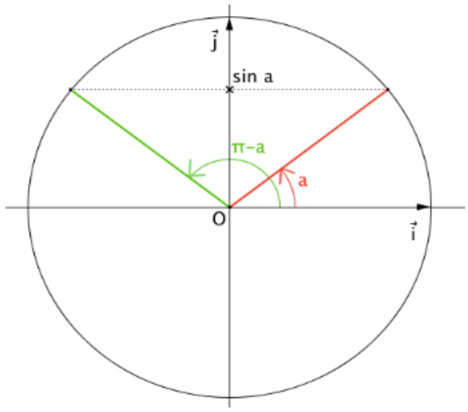
Si $k=1$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{22\pi}{21}$

Si $k=3$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{3}=\frac{36\pi}{21}=\frac{12\pi}{7}$

Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{2\pi}{7};\frac{20\pi}{21};\frac{22\pi}{21};\frac{34\pi}{21};\frac{12\pi}{7}\right\}$

2) Equation : $\sin x = a$



Propriété : Soit a un nombre réel.

Si $a>1$ ou $a<-1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

Si $a=-1$ alors on a l'équation $\sin x=-1$ On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ Donc : les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Si $a=1$ alors on a l'équation : $\sin x=1$

On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Donc on a : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Si $-1<a<1$réels alors on a l'équation $\sin x=a$:

Et on sait qu'il existe un unique réels : α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x=\sin\alpha$

Alors on a : $S_{\mathbb{R}}=\{\alpha+2k\pi;\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

Donc : $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$de l'équation $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{3} < 2k\pi \le \pi - \frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{4\pi}{3} < 2k\pi \le \frac{2\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{4}{3} < 2k \le \frac{2}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3} \le k \le \frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $-0,6... \le k \le 0,3...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < \frac{2}{3} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{2}{3} < 2k \le 1 - \frac{2}{3}$

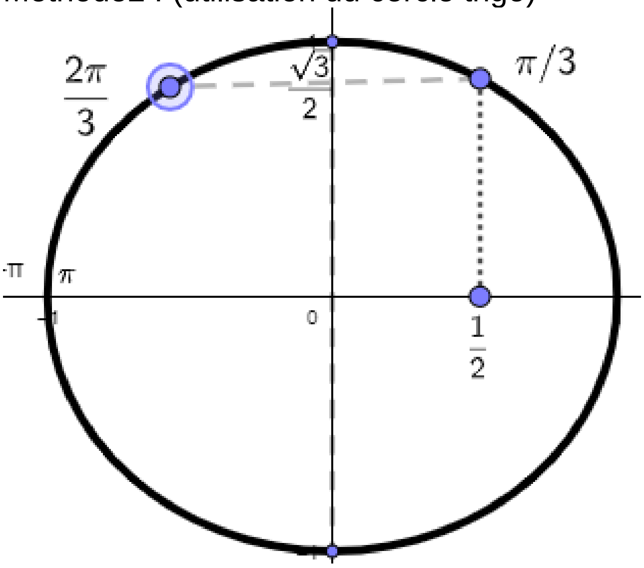
Donc : $-\frac{5}{3} < 2k \le \frac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{6} < k \le \frac{1}{6}$

Donc $-0,8... \le k \le 0,16...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

Exercice 02 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$ (E)

2) En déduire dans $\left[-\pi ; 2\pi\right[$ les solutions de l'équation (E)

Solution :1) on a : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $-x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $-x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $[-\pi\,;2\pi[$ de l'équation (E)

• Encadrement de : $\frac{\pi}{12}+2k\pi$: $-\pi\le\frac{\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\le\frac{1}{12}+2k<2$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{12}\le 2k<\frac{23}{12}$ cela signifie que : $-\frac{13}{24}\le k<\frac{23}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{\pi}{12}$

• Encadrement de : $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$: $-\pi\le-\frac{7\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\le\frac{-7}{12}+2k<2$ alors : $-1+\frac{7}{12}\le 2k<2+\frac{7}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24}\le k<\frac{31}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_2=\frac{-7\pi}{12}$ et Pour $k=1$ on trouve $x_3=\frac{17\pi}{12}$

Donc $S_{[-\pi\,;2\pi[}=\left\{\frac{-7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right\}$

3) Equation : $\tan x=a$

Propriété : Soit a un nombre réel.

L'équation $\tan x=a$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec *k* un nombre relatif

Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans D il existe un unique réel : α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x=\tan\alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}}=\{\alpha+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x=\sqrt{3}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x=\sqrt{3}$

Solution : 1) On a : $\tan x=\sqrt{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation : $\tan x=\sqrt{3}$

$\tan x=\sqrt{3}$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$: on obtient : $x=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{3}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont : $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 03 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$

Solution : $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$

Encadrement de : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$: $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{12}+k\pi<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{12}+k<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}<k<\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12}<k<\frac{7}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=0$ par suite : $x=-\frac{\pi}{12}+0\times\pi=-\frac{\pi}{12}$

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

Exercice04 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0$

Solution :1) On pose $t=\tan x$ et l'équation (E) devient : $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1$

Calcul du discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\times1\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\frac{2}{2\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\frac{-2\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}=-1$

Donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

• Pour : $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

• Pour : $\tan x = -1$

$\tan x = -1$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

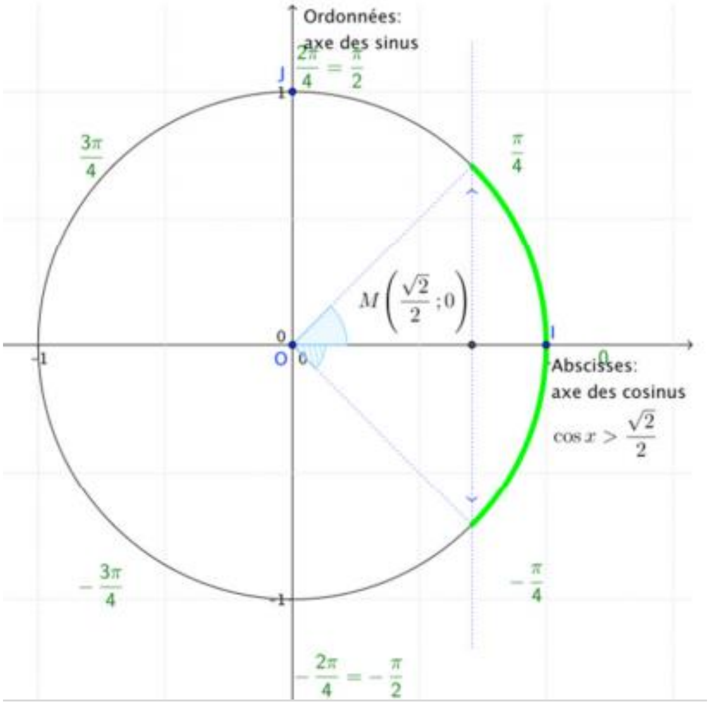
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6} + k\pi\ \ / k \in \mathbb{Z}\right\}$

II) Les inéquations trigonométriques élémentaires

Exemple1 : Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :



Donc : $S = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

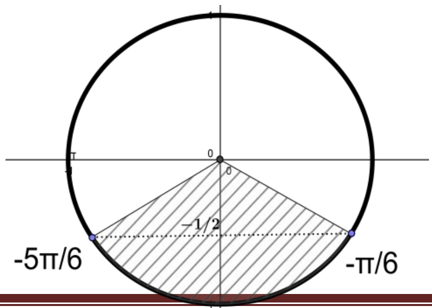
Exercice05 : (**) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$



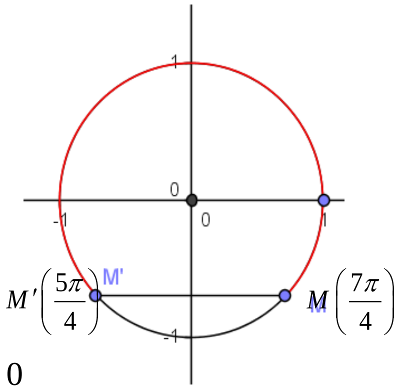
$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \leq -\sin\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$ Donc $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice06 : Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



L'arc MM' en rouge correspond à tous les points $M(x)$ tel que :

x Vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \geq \sin\frac{\pi}{6}$

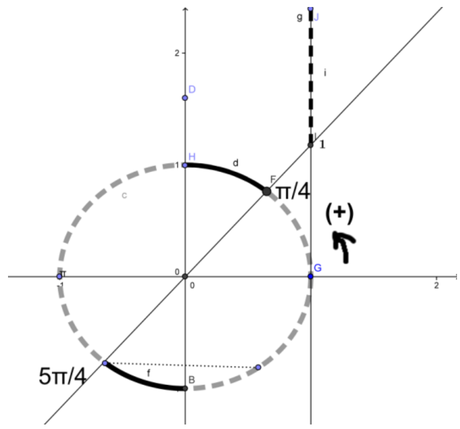
Donc : $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice07 : Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

Solution : $\tan x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq 1$

• L'inéquation $\tan x - 1 \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$



• Résolution de l'équation : $\tan x = 1$

$\tan x = 1$ Équivaut à : $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique

On compare $\tan x$ et 1 dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $\tan x \geq 1$ Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice08 : On pose : $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$

1) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation (E) : $f(x) = 0$

2) En déduire le signe de : $f(x)$ dans $]-\pi\,;\pi]$

Solution : 1) $f(x) = 0$ signifie que : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Équivaut à : $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$

Dans l'intervalle : $]-\pi\,;\pi]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$

Par conséquent : $S_{]-\pi\,;\pi]}=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

2) Déduction du signe de : $f(x)$ dans $]-\pi\,;\pi]$

• Sur l'inter valle : $\left]-\pi\,;-\frac{11\pi}{12}\right[$: on a : $-\pi<x<-\frac{11\pi}{12}$ donc : $-2\pi<2x<-\frac{11\pi}{6}$

Donc : $-2\pi+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

• Sur l'inter valle : $\left]-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{11\pi}{12}<x<-\frac{5\pi}{12}$ donc : $-\frac{11\pi}{6}<2x<-\frac{5\pi}{6}$

Donc : $-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

• Sur l'inter valle : $\left]-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$ donc : $-\frac{5\pi}{6}<2x<\frac{\pi}{6}$

Donc : $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

• Sur l'inter valle : $\left]\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[$: on a : $\frac{\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{12}$ donc : $\frac{\pi}{6}<2x<\frac{7\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

• Sur l'inter valle : $\left]\frac{7\pi}{12};\pi\right[$: on a : $\frac{7\pi}{12}<x<\pi$ donc : $\frac{7\pi}{6}<2x<2\pi$

Donc : $\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

On peut alors résumer ces résultats dans un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Exercice09 : 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

Solution :1) a) On pose $t = \sin x$ et l'équation $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ devient : $2t^2 - 9t - 5 \leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \dfrac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$ et $t_2 = \dfrac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$

Donc $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc : $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi ; \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

• Encadrement de : $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $0 \leq -\dfrac{1}{6} + 2k \leq 2$ équivaut à : $\dfrac{1}{12} \leq k \leq \dfrac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0{,}08 \leq k \leq 1{,}02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$

• Encadrement de : $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $0 \leq \dfrac{7}{6} + 2k \leq 2$ c'est-à-dire : $-\dfrac{7}{12} \leq k \leq \dfrac{5}{12}$

Donc : $-0{,}5 \leq k \leq 0{,}41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k = 0$ on remplace on trouve $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$

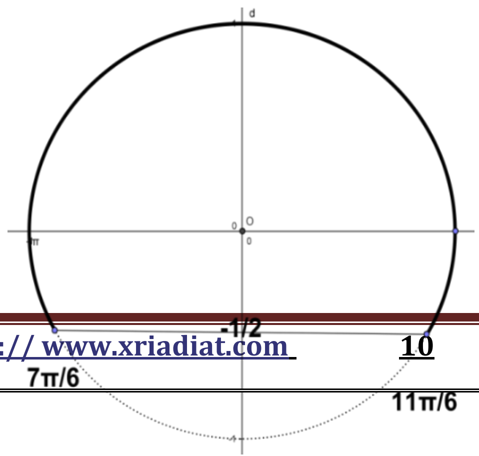
Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\dfrac{11\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ signifie que : $2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$ c'est-à-dire :
$\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors $2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

Équivaut à : $\sin x + \dfrac{1}{2} \geq 0$



Équivaut à : $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x \geq \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

L'arc en trait plein correspond à tous les points $M(x)$

Tel que : x vérifie $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$

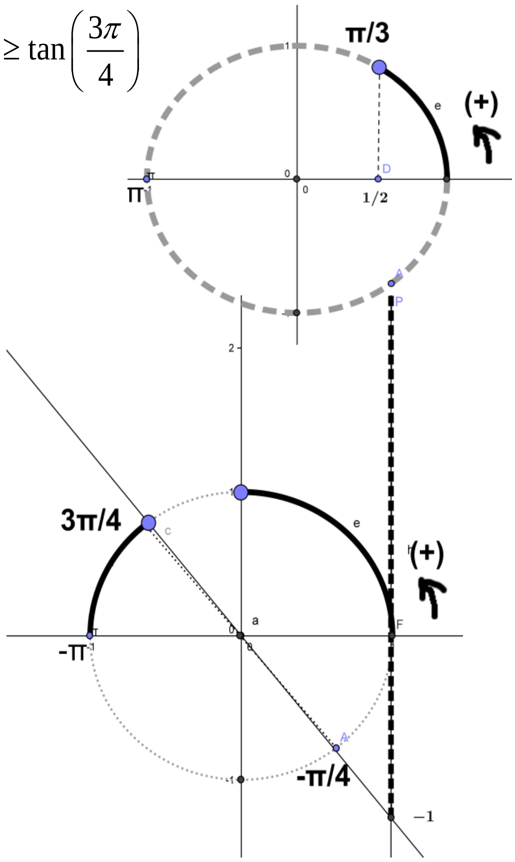
Donc $S=\left[0;\dfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi}{6};2\pi\right]$

2) l'inéquation $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$ est définie dans $[0\,;\pi]$ si et seulement si : $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Donc : $D=[0\,;\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x-1\geq 0$ Équivaut à : $\cos x\geq\dfrac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x\geq\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\tan x+1\geq 0$ Équivaut à : $\tan x\geq -1$ si et seulement si : $\tan x\geq\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$\tan x+1$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$produit$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien