Cours :Calcul vectoriel

I. Egalité de deux vecteurs et Somme de deux vecteurs

Activité

Soient A, B, C et D quatre points du plan

1) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

2) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$; puis déduire la nature du quadrilatère $EFCB$

Propriété

- On dit que deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points du plan
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ Signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: **Relation de Chasles**
- Si on a A et B deux points confondus alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Remarque :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $BCDA, CDAB$ et $DABC$ sont des parallélogrammes.

II. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

1. Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur et soit k un nombre réel non nul $(k \neq 0)$.

La multiplicité du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur qu'on note $k\vec{u}$ ou $k.\vec{u}$ telle que :

- Si $k > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$
- Si $k > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont même sens $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$

Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I et J respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[DC]$ et K un point du segment $[AD]$.

Montrer que $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$.

2. Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et soient a et b deux nombres réels on a :

- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$; $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$; $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$;
- $1.\vec{u} = \vec{u}$; $k\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow k = 0\_ou\_\vec{u} = \vec{0}$

Exemple :

$5\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$; $2(-3\overrightarrow{AB}) = -6\overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$; $3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ car $3 \neq 0$

Application

1) Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

$\vec{A} = 2(\vec{u} + 5\vec{v}) + 3(\vec{u} - \vec{v})$; $\vec{C} = \vec{u} + 7(2\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - 4\vec{v})$;

$\vec{B} = 18\vec{u} + 3(-\vec{u} + 4\vec{v}) + 2\vec{v}$; $\vec{D} = 3(\vec{u} - 4\vec{v}) + 4(\vec{u} + 3\vec{v}) - 7\vec{v}$

2) Soit x un nombre réel et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul $(\vec{u} \neq \vec{0})$; tels que $2x\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

Déterminer la valeur de x

III. Colinéarité de deux vecteurs – Alignement de trois points.

Activité :

1) Simplifier les expressions vectorielles suivantes : $\vec{A}=2\left(\vec{u}+5\vec{v}\right)+3\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ et $\vec{B}=18\vec{u}+3\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)+2\vec{v}$

2) Déduire une relation vectorielle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Définition et propriété :

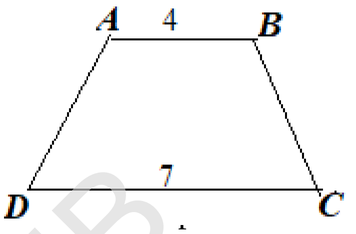
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$

- Soient A, B et C trois points du plan.

On dit que les points A, B et C sont **alignés** si et seulement les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Exemple



- Considérons le trapèze suivant :

On remarque que $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{7}\overrightarrow{DC}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

- L'écriture $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

points A, B et C sont **alignés**

Remarque :

Etant donné quatre points du plan A, B, C et D .on a $(AB)//(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{CD}$ tel que k un réel.

Application

ABC un triangle et soient D et E deux points tels que $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) Construire la figure convenable.
2) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
3) Déduire la relation vectorielle entre $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$
4) Que peut-on dire sur l'alignement des points A, E et D

IV. Milieu d'un segment :

1. Définition

Soit $[AB]$ un segment et soit I un point du plan.

On dit que I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

2. Propriétés :

Propriété 1 :

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors "$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$"

Preuve :

On a I est le milieu du segment $[AB]$

- Donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ par conséquent $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
- Donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; alors $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{IA}$ par conséquent $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$

Propriété 2 :

Soit I est le milieu du segment $[AB]$ et soit M un point du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Preuve :

On a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$ car I le milieu du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Propriété 3 :

Soit ABC un triangle et soient I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.

On a : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ou $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BC}$

Preuve : On a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AJ}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)=2\overrightarrow{IJ}$

PROF: ATMANI NAJIB