Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Présentation globale

I.) **Ensembles de nombres :** Il existe différentes sortes de nombres. Pour les classer, on les a regroupés dans différents ensembles remarquables :

a) L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$ et $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;.....\}=\mathbb{N}-\{0\}$ (ℕ Privé de 0).

b) L'ensemble **des entiers relatifs :** $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs :

$\mathbb{Z}=\{...;-2-1;0;1;2;...\}$

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}=\{...;-2-1;1;2;...\}$ ($\mathbb{Z}$ Privé de 0).

c) L'ensemble des décimaux : $\mathbb{D}$

L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres dits "à virgule"

$$\mathbb{D}=\left\{a\times 10^{-n}=\frac{a}{10^n}\,/\,a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}\right\}$$

d) L'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q}$

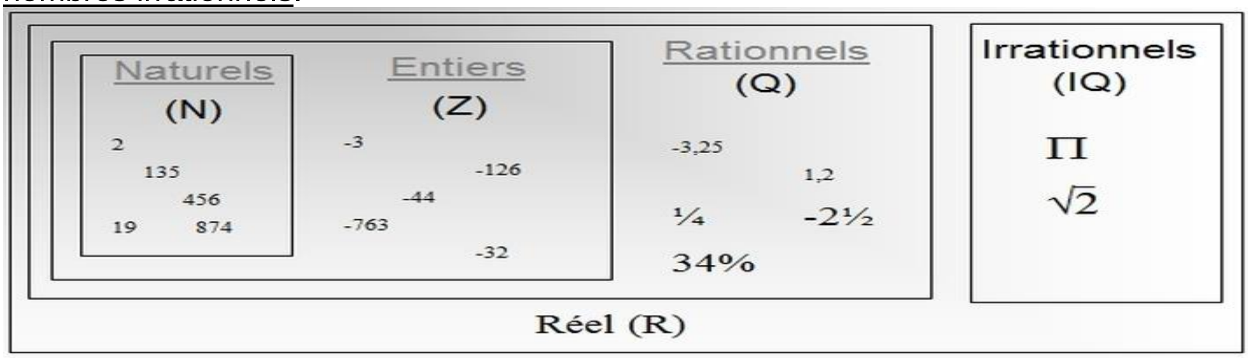
Les nombres rationnels sont les fractions de la forme $\frac{a}{b}$: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,/\,a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$

e) L'ensemble des réels : $\mathbb{R}$. Tous les nombres utilisés jusqu'à présent sont des réels.

$\mathbb{R}^+$ Désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro).

$\mathbb{R}^-$ Désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro) et $\mathbb{R}^*$ est l 'ensemble des réels non nuls

Remarque1 : Parmi les nombres réels, il y a les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres décimaux, les nombres rationnels. Les nombres réels qui ne sont pas rationnels qui sont appelés nombres irrationnels.



Et on a : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset D\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

Remarque2 : Pour savoir si un nombre rationnel est décimal ou pas, on peut mettre ce nombre sous la forme **d'une fraction irréductible** ; si le dénominateur est de la forme $2^p\times5^q$, p et q étant des entiers naturels, alors ce nombre est décimal, sinon il ne l'est pas.

Remarque3 : un irrationnel a une écriture décimale non périodique infinie :

Par exemple : 1.4142135623730950488016887242097 …

$\frac{1}{3}=0.333333.......$ est rationnel mais $\frac{1}{3}\notin D$

Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :

$\frac{17}{7}=$ 2.4285714285714285714285714285714… ; 428571 se répète

$\sqrt{2}\notin$ Q ; $-\frac{\sqrt{3}}{2}\notin$ Q ; π ∉ Q

- « Soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit **x ∊ IR** » ou « soit x un nombre réel »
- Le signe placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro.Ainsi **IR*** désigne les réels non nuls.
- Le signe + ou - placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs ou positifs

Ainsi **IR**$^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro) et IR$^-$ désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

Remarque4 : Pour déterminer les éléments communs à deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cap$.

<u>Exemple :</u> a) si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cap B=\{4;5\}$

b) Pour réunir deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cup$

Exemple : si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cup B==\{-3;3;4;5;6.8\}$

c) L'ensemble vide : $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

d) On a : $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-=\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{0\}$; $\mathbb{R}^{+*}\cap\mathbb{R}^-=\varnothing$

Exercice1 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : ∈ ; ∉; ⊂; ⊄

$2,5...\mathbb{Z}$; $-2...\mathbb{Q}$; $\sqrt{3}...\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}^+....\mathbb{R}$; $\mathbb{N}....\mathbb{R}$; $\sqrt{3}....\mathbb{R}^-$; $-1....\mathbb{N}$; $\frac{100}{5}....\mathbb{N}$; $-\frac{\sqrt{100}}{5}....\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}....\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}^-....\mathbb{Z}$; $0....\mathbb{Z}^*$; $-\frac{\sqrt{16}}{3}...\mathbb{Z}$; $-\sqrt{7}...\mathbb{R}^-$; $\frac{7}{3}...\mathbb{Q}^{*+}$: $\frac{1}{3}....D$; $2,12....\mathbb{N}^*$; $\frac{7}{3}....D$; $\frac{1}{4}...D$; $\pi...\mathbb{Q}$; $\{0;-5;-13;-100\}...\mathbb{Z}$; $1....\{0;2;3\}$; $\mathbb{R}^-...\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^-....\mathbb{R}^*$; $0....\varnothing$; $\{0;\sqrt{2};1\}...\mathbb{Q}$

<u>**Solution :**</u> $2,5\notin\mathbb{Z}$; $-2\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$; $\sqrt{3}\notin\mathbb{R}^-$; $-1\notin\mathbb{N}$; $\frac{100}{5}\in\mathbb{N}$; $-\frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}^-\subset\mathbb{Z}$; $0\notin\mathbb{Z}^*$; $-\frac{\sqrt{16}}{3}\notin\mathbb{Z}$; $-\sqrt{7}\in\mathbb{R}^-$; $\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}^{*+}$: $\frac{1}{3}\notin D$; $2,12\notin\mathbb{N}^*$; $\frac{7}{3}\notin D$; $\frac{1}{4}\in D$; $\pi\notin\mathbb{Q}$; $\{0;-5;-13;-100\}\subset\mathbb{Z}$; $1\notin\{0;2;3\}$; $\mathbb{R}^-\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^-\not\subset\mathbb{R}^*$; $0\notin\varnothing$; $\{0;\sqrt{2};1\}\not\subset\mathbb{Q}$

II) Opérations et règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels

$a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $d\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}$

$a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$-a$ L'opposé de a

$(-a)+a=a+(-a)=0$ et $a+0=0+a=a$

$a-b=a+(-b)$ et $-(a-b)=-a+b$

$a\times b=b\times a=ab=ba$ et $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$

Si : $a \neq 0; a\times\frac{1}{a}=1$ $\frac{1}{a}$ l'inverse de a et $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

$k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$

$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

Si $bd\neq 0$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ et $k\times\frac{a}{b}=\frac{ak}{b}$

$\frac{\frac{a}{b}}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b};bc\neq 0$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Si on a : $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$ alors $a+c=b+d$

Si $bd\neq 0$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si ad=bc

$\frac{a}{b}=0$ si et seulement si $a=0$

Exercice2 : Calculer et simplifier : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$ $B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2$ $D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$; $F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}$ $G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]$

Solution : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

$$B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2=\frac{-8}{12}+\frac{14}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{-8+14-3-24}{12}=\frac{-21}{12}=-\frac{7}{4}$$

$$C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{4-15}{6}\right)^2=\left(\frac{-11}{6}\right)^2=\frac{(-11)^2}{6^2}=\frac{121}{36}$$

$$D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{32}{3}$$

$$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10}+\frac{10}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3\times 3}{5\times 2}=\frac{3}{5}$$

$$F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}=\frac{\frac{7\pi-4}{\pi}}{\frac{12-21\pi}{1}}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}$$

$$F=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{-3(7\pi-4)}=-\frac{1}{3\pi}$$

$$G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]=(a-c-a+b)-(c-a+b-c)$$

$$G=a-c-a+b-c+a-b+c=a-c$$

III)Racine carrée

Activité : On considère un triangle ABC rectangle en A

1)Sachant que AB = 3 cm et AC = 4 cm,

a) Calculer la valeur exacte de BC.

b) Quels sont les nombres qui ont pour carré 25 ? Pourquoi a-t-on BC = 5 ?

c) Compléter la phrase suivante :

« BC est le nombre positif dont le carré est … »

2)On suppose maintenant que AB = 2 cm et AC = 3 cm.

« BC est le nombre positif dont le carré est ... »

Rechercher la valeur exacte de BC

On dira que la valeur exacte de BC est **la racine carrée** de 13 que l'on notera $\sqrt{13}$

3)Peut-on obtenir la racine carrée de -16 ?

La racine carrée d'un nombre négatif existe-t-elle ?

Définition : a est un nombre **positif**. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est Égal à a.

Exemple : $\sqrt{4}$ = 2 ; $\sqrt{0}$ = 0

$\sqrt{1}=1 \quad \sqrt{9}=3 \quad ; \quad \sqrt{225}=15$

$\sqrt{1{,}5625}=1{,}25 \quad ; \quad \sqrt{36000000}=6000$

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

Propriétés : Soient a et b deux nombres positifs ou nuls

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$ 2) $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n};n\in\mathbb{N}^*$

3) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};b\succ 0$

Remarque : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ En effet : $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$ car : $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Et $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Propriété : $x\geq 0$ et $y\geq 0$ $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ si et seulement si : $x=y$

Propriété : $a\in\mathbb{R}^+$; $x^2=\text{a si et seulement si } x=\sqrt{\text{a}}$ ou $x=-\sqrt{\text{a}}$

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $x^2 = 100$

$x^2 = 100 \text{ si et seulement si } x=\sqrt{100}$ ou $x=-\sqrt{100}$ si et seulement si : $x=10$ ou $x=-10$

Donc : $S=\{-10;10\}$

Exercice3 : Calculer et simplifier : $A=\sqrt{\frac{9}{2}}$; $B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$; $C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$;

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$; $E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; $G=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}-8\sqrt{8}\times 2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\times\sqrt{20}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{24}$

$H=5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}-\sqrt{147}$; $K=\frac{6\sqrt{52}}{\sqrt{13}}-\left(5-\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right)$

Solution : $A=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{28}{14}}=\sqrt{2}$

$C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}=3\sqrt{4\times 5}+4\sqrt{9\times 5}-2\sqrt{16\times 5}-\sqrt{36\times 5}$

$C=3\times 2\sqrt{5}+4\times 3\sqrt{5}-2\times 4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}=(6+12-8-6)\sqrt{5}$

Donc : $C=4\sqrt{5}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-5=3+2\sqrt{3\times 2}+2-5$

Donc : $D=2\sqrt{6}$

$$E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$$

$$E=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$E=\frac{3+2\sqrt{15}+5-\left(3-2\sqrt{15}+5\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+2\sqrt{15}+5-3+2\sqrt{15}-5}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{15}}{-2}=-2\sqrt{15}$$

$$F=\left(-\sqrt{10}\right)\times\left(-\sqrt{10}\right)+\sqrt{5}\times\left(-\sqrt{20}\right)-\sqrt{2}\times\sqrt{32}$$

$$F=\left(-\sqrt{10}\right)^2-\sqrt{5}\times\sqrt{5\times4}-\sqrt{2}\times\sqrt{2\times16}=10-\sqrt{5}^2\times2-\sqrt{2}^2\times4=10-10-8=-8$$

$$G=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-8\sqrt{8}\times2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\times\sqrt{20}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{24}$$

$$G=2\times\sqrt{3}^2-8\sqrt{8}\times\sqrt{8}-3\sqrt{5}\times\sqrt{5\times4}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2\times2\times3}$$

$$G=2\times3-8\sqrt{8}^2-3\sqrt{5}^2\times2+\sqrt{2}^2\times\sqrt{3}^2\times2=6-64-30+12=-76$$

$$H=5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}-\sqrt{147}$$

$$H=5\sqrt{4\times3}+8\sqrt{9\times3}+\sqrt{25\times3}-2\sqrt{16\times3}-\sqrt{49\times3}=10\sqrt{3}+24\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3}-7\sqrt{3}=24\sqrt{3}$$

$$K=\frac{6\sqrt{52}}{\sqrt{13}}-\left(5-\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right)=6\sqrt{\frac{52}{13}}-\left(5^2-\sqrt{13}^2\right)=6\sqrt{4}-\left(25-13\right)=12-12=0$$

Exercice4 : Soit $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

Montrer que : E est nombre entier relatif

Solution : $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$

$$E=\frac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{45}{-5}=-9\in\mathbb{Z}$$

Exercice5 : calculer et simplifier : $A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$

Solution : $A=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$

$$A=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

Exercice6 : Rendre le dénominateur rationnel du quotient suivant : $A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

Solution : On multiplie le dénominateur par son conjugué

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$$

IV)Les Puissances :

1) Définition et notations : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

Le produit de n facteurs égaux à a et noté a^n et s'appelle la puissance n-ième de a » ; n est appelé exposant : $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{\text{م رةال عد د}}$ Cas particulier : $a^1=a; a^0=1$

Et on a : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ En particulier : $10^n=\underbrace{1000\cdots0}_{n};n\in\mathbb{N}$ (n zéros)

$10^{-n}=\underbrace{0,000\cdots01}_{n};n\in\mathbb{N}$ (n zéros) et $10^1=10$; $10^{-1}=0,1$; $10^{-2}=0,01$; $10^0=1$

2) Propriétés des puissances : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$; $m\in\mathbb{N}^*$

$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ $a^n\times b^n=(ab)^n$; $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$; $a^n\times a^m=a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

3)Remarque : a) La puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair
b) La puissance d'un nombre négatif est négative si l'exposant est impair.

Ex : $(-1)^{2020}=1^{2020}=1$ et $(-1)^{2019}=-1^{2019}=-1$

Exercice7 : Simplifier et écrire sous forme d'une puissance :

$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3$; $B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}$ $C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2}$ $D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$E=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}$

__**Solution :**__ $A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3=2^3\times2^{2\times4}\times2^{-5\times3}=2^{3+8-15}=2^{-4}$

$A=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

$B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}=-(3)^1\times-(3)^5\times(3)^2\times(3)^{-10}$

$B=3^1\times3^5\times3^2\times3^{-10}=3^{1+5+2-10}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

$C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2}=\frac{3^{-5}\times\left(2^2\right)^{-2}}{\left(3\times2^2\right)^3}\times\frac{3^2}{2^2}=\frac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}$

$C=\frac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}=3^{-5}\times2^{-4}\times3^2\times(3)^{-3}\times2^{-6}\times2^{-2}=3^{-5-3+2}\times2^{-4-6-2}$

$C=3^{-6}\times2^{-12}$

$D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\frac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}}=\frac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$

$D=-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$

$E=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}=10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}\times10^2\times10^{-3}\times10^{-5}$

$E=10^{-8+9+7-4+2-3-5}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$

4°) __Écriture scientifique d'un nombre décimal__

La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a\times10^p$ où a est un nombre décimal ($1\leq a\prec10$) et p un nombre entier relatif.

Exercice7 : Convertir en écriture scientifique les nombres suivants :

1) 368 100 000 0 2) 0.0002

__**Solution :**__ 1) $3681000000=3.681\times10^9$ 2) $0.0002=2\times10^{-4}$

V) Identités remarquables : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour **développer** et pour **factoriser**

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un **produit**.

Exemple1: $x\in\mathbb{R}$ Développer et calculer et simplifier

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$; $B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ $D=(3x-2)^3$; $E=(x+2)(x^2-2x+4)$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

(Lorsque la calculatrice tombe en panne ou ne peut pas calculer)

Solution : $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$

$A=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$

$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=(2-3)^2=(-1)^2=1$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\times1+3\sqrt{2}(1)^2+(1)^3=2\sqrt{2}+3\times2+3\sqrt{2}+1$

$C=5\sqrt{2}+7$

$D=(3x-2)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times2+3\times3x\times(2)^2-(2)^3$

$D=27x^3-54x^2+36x-8$

$E=(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-2\times x+2^2)=x^3+2^3=x^3+8$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

On remarque que les nombres : 200520052006 et 200520052005

Et 200520052007 différent par leurs chiffres des unités

Pour simplifier on pose : $x=200520052006$

Donc : $200520052005=x-1$ et $200520052007=x+1$

Donc : $F=x^2-(x-1)(x+1)=x^2-(x^2-1)=x^2-x^2+1=1$

Donc : $F=1$

VI) Factorisation : Méthodes : Pour factoriser une expression, on peut :

- Identifier une identité remarquable
- Identifier un facteur commun

Attention : on ne peut pas toujours factoriser une expression

Exemple :16x² + 8x + 3 = (4x+1) ² + 2 ; cette expression ne peut pas être factorisée sous la forme d'un produit de deux facteurs de degré 1

Exercice8 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=16x^2-8x+1$; $B=16-25x^2$; $C=1-(1-3x)^2$; $D=(2x-1)^3-8$; $E=27+x^3$; $F=x^{12}-2x^6+1$

$G=x^5+x^3-x^2-1$ $H=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)$; $M=x^4-49$; $N=a^2+b^2-x^2+2ab$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)\left(2x-\sqrt{5}\right)$; $K=(x-2)(3x-4)+x^3-8$; $R=x^2-6x+8$

$S=ax+ay-bx-by$; $U=a^2-a-x^2+x$; $V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

Solution : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$

$B=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$

$C=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$

$C=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$

$D=(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3$ On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Donc : $D=((2x-1)-2)((2x-1)^2+(2x-1)\times 2+2^2)$

$D=(2x-3)((2x)^2-4x+1+4x-2+4)=(2x-3)(4x^2+3)$

$E=27+x^3=3^3+x^3=(3+x)(3^2-3x+x^2)$ Car : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$.

$E=(3+x)(9-3x+x^2)$

$F=(x^6)^2-2x^6+1=(x^6)^2-2x^6\times 1+1^2=(x^6-1)^2$

$G=x^5+x^3-x^2-1=x^3(x^2+1)-(x^2+1)=(x^3-1)(x^2+1)$

$H=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)=x^3+1^3+2(x^2-1^2)-(x+1)$

$H=(x+1)(x^2-x+1^2)+2(x+1)(x-1)-(x+1)$

$H=(x+1)(x^2-x+1+2(x-1)-1)=(x+1)(x^2-x+1+2x-2-1)$

$H=(x+1)(x^2+x-2)$

$M=x^4-49=x^4-(\sqrt{7})^4=(x^2)^2-(\sqrt{7}^2)^2$

$M=(x^2-\sqrt{7}^2)(x^2+\sqrt{7}^2)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

$N=a^2+b^2-x^2+2ab=a^2+2ab+b^2-x^2=(a+b)^2-x^2$

Donc : $N=(a+b-x)(a+b+x)$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)(2x-\sqrt{5})=(2x)^2-2\times 2x\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$

$L=(2x-\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})=(2x-\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}+1-2x)$ C'est-à-dire : $L=(2x-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$

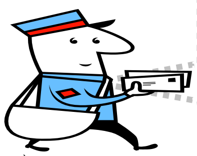
$K=(x-2)(3x-4)+x^3-8=(x-2)(3x-4)+(x-2)(x^2+2x+4)$ $K=(x-2)(3x-4+x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+5x)=x(x-2)(x+5)$

$R=x^2-6x+8=x^2-6x+9-1=x^2-2\times 3x+3^2-1$

$R=(x-3)^2-1^2=(x-3-1)(x-3+1)=(x-4)(x-2)$

$S=ax+ay-bx-by=a(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b)$

$U=a^2-a-x^2+x=a^2-x^2-(a-x)$



<u>Factoriser</u> c'est écrire sous la forme d'un produit

$U=(a-x)(a+x)-(a-x)\times 1$ Donc : $U=(a-x)(a+x-1)$.

$V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-(x^4-4abx^2+4a^2b^2)$

$V=(a^2+b^2)^2-(x^2-2ab)^2=(a^2+b^2+x^2-2ab)(a^2+b^2-x^2+2ab)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien