Cours avec Exercices avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB
Tronc commun Sciences BIOF
http://www. xriadiat.com

FONCTIONS - *Généralités*

Leçon : FONCTIONS - Généralités
Présentation globale
Chapitre nº 1

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions :

Définition : Une ***fonction*** est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y : On note : $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

2)Exemples :Exemple 1 : Soit Les fonctions numériques suivants :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$; $g(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}$. $h(x) = \dfrac{2x-1}{5x-4}$; $l(x) = \sqrt{x}$; $R(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique :

Une fonction homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple 2 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=-x^2+2x+2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.

2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f
3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f
4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)
Solution : 1) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{-1}{2}\right)+2=-\frac{1}{4}-1+2=\frac{3}{4}$ et $f\left(\sqrt{3}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\left(\sqrt{3}\right)+2=-3+2\sqrt{3}+2=-1+2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$?

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=-\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\times\left(1+\sqrt{2}\right)+2=-\left(1+2\sqrt{2}+2\right)+2+2\sqrt{3}+2=-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=1$

Donc : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $-x^2+2x+2=0$ $a=-1$ et $b=2$ et $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)=4+8=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3}$ et $x_1=\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=1+\sqrt{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

4) les antécédents éventuels de 0 par f sont :$1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de$\left(C_f\right)$la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(1-\sqrt{3};0\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3};0\right)$

3°) Domaine de définitions

Activités :1) On considère la fonction réelle de la variable réelle définie par : $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

2) On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\mapsto} \sqrt{x-3}$
Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

3) On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Solution : 1) 0 ; 2 ; -3 ont des images par f mais 3 n'a pas d'images par f car : $f(3)=\frac{1}{3-3}=\frac{1}{0}\notin\mathbb{R}$

2) 4 à une image par g mais 0 ; 2 ; -3 n'ont pas d'images par g car : $g(0)=\sqrt{0-3}=\sqrt{-3}\notin\mathbb{R}$

$g(2)=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$ et $g(-3)=\sqrt{-3-3}=\sqrt{-6}\notin\mathbb{R}$

3)5 et -6 ont une image par h mais 9 ; 7 : n'ont pas d'images par h car :

$h(9)=\frac{1}{\sqrt{7-9}}=\frac{1}{\sqrt{-2}}\notin\mathbb{R}$ et $h(7)=\frac{1}{\sqrt{7-7}}=\frac{1}{\sqrt{0}}\notin\mathbb{R}$

Définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{5x^2-4x}$ 2) $f(x)=\frac{|-5x^2+2|}{2x^2-x-6}$ 3) $f(x)=\frac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$

4) $f(x)=\frac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$ 5) $f(x)=\frac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$ 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$

7) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ 8) $f(x)=\frac{|x^2-6|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$ 9) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

10) $f(x)=\sqrt{2|x-9|-1}$ 11) $f(x)=2\sin^2 x+3\cos x-1$ 12) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

13) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$ 14) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x^2+1}{5x^2-4x}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/5x^2-4x\neq 0\}$

$5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Signifie que : $x = 0$ ou $5x – 4 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

2) $f(x)=\frac{|-5x^2+2|}{2x^2-x-6}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq 0\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 – 4ac = (-1)^2 – 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

3) $f(x)=\frac{2x^5-2023}{x^2+3x+10}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+10\neq 0\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2 – 4ac = 3^2 – 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle

C'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{6x-5}{x^4-2x^2+1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^4-2x^2+1\neq 0\}$

$x^4-2x^2+1=0$ Equivalent à : $(x^2)^2-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta = (-2)^2 – 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\frac{-(-2)}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc on a : $x^2=1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

5) $f(x)=\frac{-\sqrt{x-1}+1}{|7x-10|-|6+3x|}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|7x-10|-|6+3x|\neq0 \ \ et \ \ x-1\geq0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|7x-10|-|6+3x|\neq0 \ \ et \ \ x\geq1\}$

$|7x-10|-|6+3x|=0$ Équivalent à : $|7x-10|=|6+3x|$

Équivalent à : $7x-10=6+3x$ ou $7x-10=-(6+3x)$

Équivalent à : $4x=16$ ou $10x=4$ équivalent à $x=4$ ou $x=2/5$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{2}{5} \ \ et \ \ x\neq4 \ \ et \ \ x\geq1\right\}$

Donc : $D_f=[1;4[\cup]4;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{6|x+5|+2}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/6|x+5|+2\neq0 \ \ et \ \ x\geq0\}$

On a : $|x+5|\geq0$ donc : $6|x+5|\geq0$ donc : $6|x+5|+2\geq2>0$

Donc : $6|x+5|+2\neq0$

Par suite : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\}$

Par suite : $D_f=[0,+\infty[$

7) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1>0\}$

$2x^2-3x+1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{|x^2-6|}{\sqrt{-2x^2+4x-2}}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+4x-2>0\}$

Étudions le signe du trinôme de : $-2x^2+4x-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme Δ = 0, le trinôme possède une racine double : $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

Comme : $a=-2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $D_f=\varnothing$

9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}\geq 0 \;\; et \;\; 2x^2+x-5\neq 0\right\}$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 5=1+20=21$;

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\simeq 2{,}8$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\simeq -1{,}8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. De même, pour le dénominateur : $\Delta=1^2-4\times(-5)\times 2=1+40=41$

Donc : $x_1'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}\simeq -1{,}9$ et $x_2'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}\simeq 1{,}4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+x-5$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4};\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left]\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

10) $f(x)=\sqrt{2|x-9|-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x-9|-1\geq 0\}$

$2|x-9|-1\geq 0$ Signifie que : $2|x-9|\geq 1$

Signifie que : $|x-9|\geq\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x-9\geq\dfrac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $x\geq\dfrac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\dfrac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq\dfrac{19}{2}$ ou $x\leq-\dfrac{17}{2}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-\dfrac{17}{2}\right]\cup\left[\dfrac{19}{2};+\infty\right[$

11) Un réel a toujours une image par f

Donc $D_f=\mathbb{R}$

12) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$. ; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 \ et\ 3-5x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\frac{1}{2}\ et\ x\leq\frac{3}{5}\right\}$ Donc $D_f=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

13) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ On pose $|x|=X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ N'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ Ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

14) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\right\}$

$2\cos x-1=0$ Signifie $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$ Signifie $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1)Egalité de deux fonctions

Définition : Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs

On dit que f et g sont égaux et on écrit $f=g$

Si et seulement si : $D_f=D_g$ et pour tout $x\in D_f$ (ou $x\in D_g$) on a : $f(x)=g(x)$

Exemple 1 : Soient les deux fonctions suivantes : $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ et $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

Est-ce que : $f=g$? Justifier

Solution : Nous avons : a) $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

b) $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}=f(x)$

Ainsi : $D_f=D_g$ et $g(x)=f(x)$ pour tout de : $D_f=D_g$ Donc : $f=g$

Exemple 2 : Les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ et $x-1 \neq 0$ donc ce qui donne $D_f =]-\infty;-3[\cup [1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1 \geq 0$ et $x+3 \succ 0$ ce qui donne $D_g = [1;+\infty[$

On a donc $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f \neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a f (x) = g(x).

Exercice2 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x+2} \times \sqrt{3-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-1)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et $\sqrt{6}$ par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{-2x^2+4x+6}$ Montrer que : $f = g$

Solution : 1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x+2 \geq 0 \quad et \quad 3-x \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \; et \; x \leq 3\}$ Donc $D_f = [-1,3]$

b) Calcul des images :

$f(0) = \sqrt{2\times 0+2} \times \sqrt{3-0} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

et $f(-1) = \sqrt{2\times(-1)+2} \times \sqrt{3-(-1)} = \sqrt{0} \times \sqrt{4} = 0$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x) = 0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Équivaut à: $\sqrt{2x+2} \times \sqrt{3-x} = 0$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2} = 0$ ou $\sqrt{3-x} = 0$

Équivaut à : $2+2x = 0$ ou $3-x = 0$

Équivaut à : $x = -1$ ou $x = 3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -1 et 3.

• x est l'antécédents de $\sqrt{6}$ par f signifie que $\sqrt{6}$ est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x) = \sqrt{6}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \sqrt{6}$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2} \times \sqrt{3-x} = \sqrt{6}$

Équivaut à : $(2x+2)(3-x) = 6$

Équivaut à : $6x - 2x^2 + 6 - 2x = 6$

Équivaut à : $-2x^2 + 4x = 0$

Équivaut à : $-2x(x-2) = 0$

Équivaut à : $-2x = 0$ ou $x-2 = 0$

Équivaut à: $x = 0$ ou $x = 2$

Finalement les antécédents de $\sqrt{6}$ par f sont : 0 et 2

4) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{-2x^2+4x+6}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2+4x+6 \geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64 > 0$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{-12}{-4} = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g = [-1,3]$

On a donc : $D_f = D_g$.

$f(x) = \sqrt{2x+2} \times \sqrt{3-x} = \sqrt{(2x+2)(3-x)} = \sqrt{-2x^2+6x+6-2x} = \sqrt{-2x^2+4x+6} = g(x)$

Conclusion : $f = g$

2) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté a un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Définition : Soit f une fonction, et D_f son domaine de définition

L'ensemble des points M (*x*, *f* (*x*)) forme la courbe représentative de la fonction *f*, souvent notée C_f . $C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$

__**Méthode :**__

Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple 1 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 2$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm à l'aide du tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

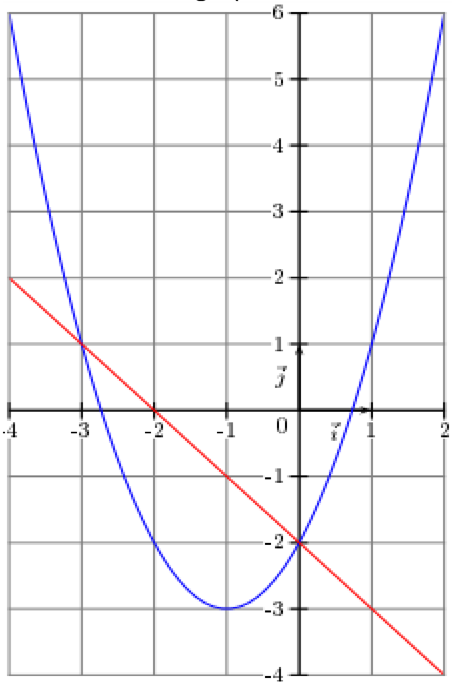
2) Résoudre graphiquement dans l'intervalle [−4 ; 2] :

• l'équation : $f(x) = 1$

• l'équation : $f(x) = -x-2$

• l'inéquation : $f(x) \leq -2$

Solution : 1) La courbe de la fonction f est tracée en bleu et la droite d'équation : $y = -x-2$ est tracée en rouge(c'est une droite)



2)

- $f(x)=1$: S = {−3 ; 1} (abscisses des points de la courbe d'ordonnée égale à 1)
- $f(x)=-x-2$: S = {−3 ; 0} (abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite d'équation $y=-x-2$)
- $f(x)\leq -2$: S = [−2 ; 0] (abscisses des points de la courbe d'ordonnée inférieure ou égale à -2)

Exercice3 : Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=|2x-4|$

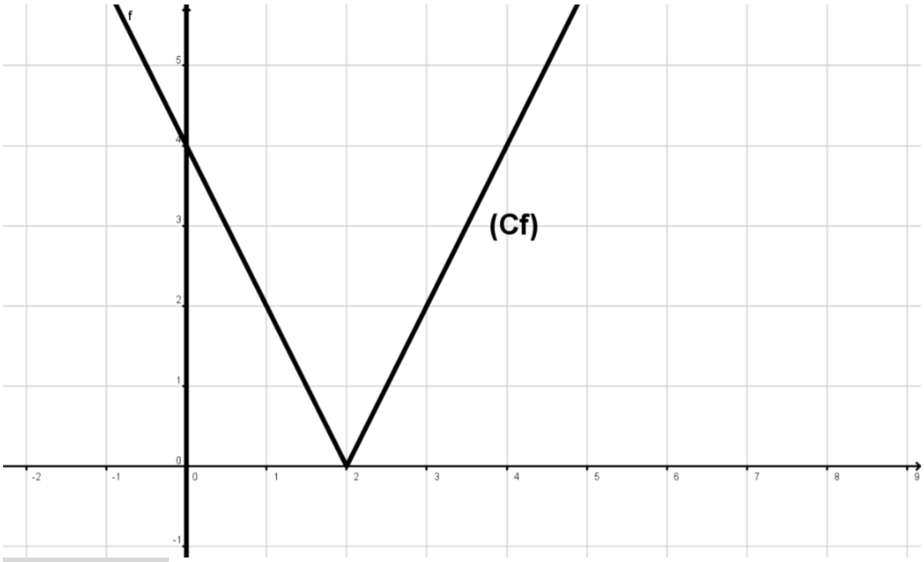
Solution : On a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$2x-4=0$ Équivaut à : $x=\frac{4}{2}=2$

Donc $f(x)=2x-4$ si $x\in[2,+\infty[$

$f(x)=-2x+4$ Si $x\in]-\infty,2]$

x		2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$		$2x-4$



Exercice4 : Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

Solution :

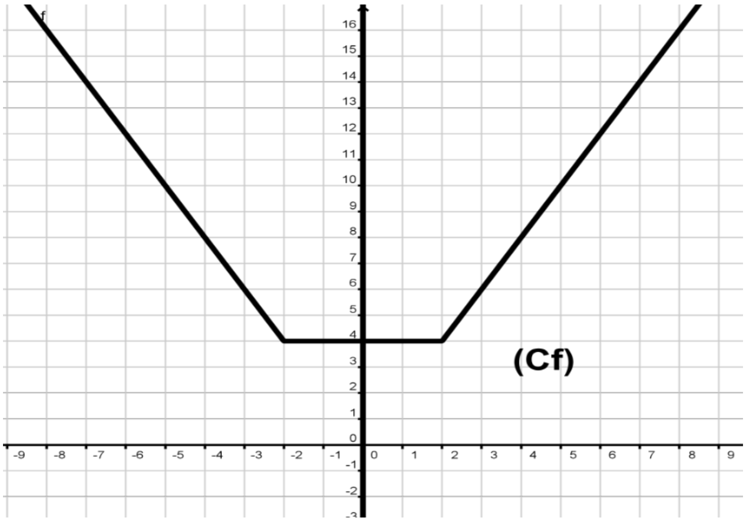
-On a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$

$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$		$-x+2$		$x-2$
$x+2$	$-$	0	$+$	0	$+$
$\|x+2\|$	$-x-2$		$x+2$	0	$x+2$
$\|x-2\|+\|x+2\|$	$-2x$		4		$2x$

Donc $f(x)=-2x$ si $x\in]-\infty,-2]$ et $f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$ et $f(x)=2x$ si $x\in[2,+\infty[$



III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1. Définitions :

a. Ensemble de définition centrée

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :

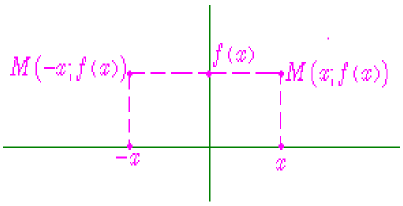
Pour tout réel *x*, si $x \in$ D*f* , alors $-x \in$ D*f* .

b. Fonction paire :

On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :

1) Son ensemble de définition est centré

2) Pour tout réel *x* de D*f*, on a : $f(-x) = f(x)$



<u>Remarques</u> :

- si *n* est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.
 (C'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- La fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- L'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- L'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- La somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- Le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

c. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1) Son ensemble de définition est centré,

2) Pour tout réel *x* de D*f*, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si *n* est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Exemples : Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=3x^2-5$ 2) $g(x)=\frac{3}{x}$ 3) $h(x)=2x^3+x^2$ 4) $t(x)=\frac{x}{x-2}$

5) $m(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$ 6) $l(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ 7) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{3}{x}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x\neq 0$ donc $D_g=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\frac{3}{-x}=-\frac{3}{x}$ donc : $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x)=2x^3+x^2$

h Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$
  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tel que : $t(x)=\frac{x}{x-2}$

On a $t(x)\in\mathbb{R}$ Équivaut à: $x-2\neq 0$ signifie que : $x\neq 2$ donc : $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$.

On a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

5) $m(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$: On a $m(x)\in\mathbb{R}$ Équivaut à: $x\neq 0$ donc $D_m=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $m(-x)=|-x|-\frac{1}{(-x)^2}=|x|-\frac{1}{x^2}$ donc : $m(-x)=m(x)$

Donc m est une fonction paire,

6) $l(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$: On a $l(x)\in\mathbb{R}$ signifie $1+x^2\neq 0$

$1+x^2=0$ Équivaut à: $x^2=-1$ impossible par suite : $D_l=\mathbb{R}$

On va donc montrer que l n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $l(1)$ et $l(-1)$

$l(1)=\frac{1+1}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$ et $l(-1)=\frac{1-1}{1+(-1)^2}=\frac{0}{2}=0$ donc : $l(-1)\neq -l(1)$

Par suite : l n'est ni paire ni impaire.

7) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$ on a : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2\sin(-x)-(-x)^3(1-\cos(-x))$

$f(-x)=-2\sin x+x^3(1-\cos x)$ Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-(2\sin x-x^3(1-\cos x))=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

Exercice5: Soit la fonction numérique : $f(x)=-4x^3+\dfrac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de f

3) Montrer que : $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution :1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$

- 2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-4(-x)^3+\dfrac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\dfrac{1}{2x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) pour tout $x\in D_f$ nous avons :

$f(x)-f(-x)=f(x)-(-f(x))$ Car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x)=2f(x)$ par suite : $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\dfrac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

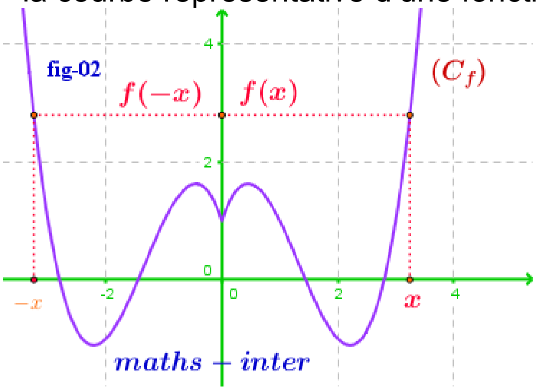
$g(-1)=-4(-1)^3+\dfrac{1}{2(-1)}+1=\dfrac{9}{2}$ et $g(1)=-4(1)^3+\dfrac{1}{2\times1}+1=-\dfrac{5}{2}$ et $-g(1)=\dfrac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

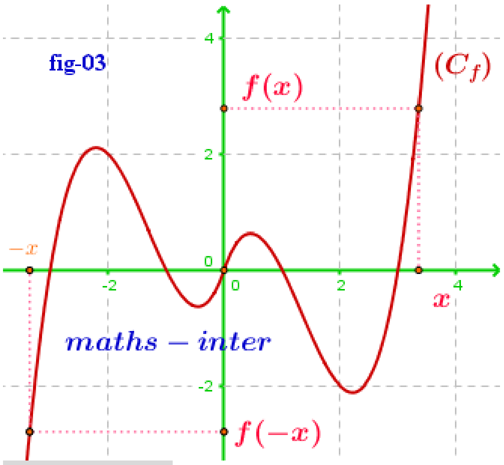
Cela signifie que : la fonction g est ni paire ni impaire,

2. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.



- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Exercice6 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$

(C_f) la courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que : f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite : la (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tel que : $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ $\left(f(x_1)\leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire que f est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tel que $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ $\left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire que f est constante sur I signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tel que $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)=f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Exemples : 1) Soit f une fonction tel que : $f(x)=7x-5$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1 - 5 \prec 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ alors $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Soient $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tel que $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ alors $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que f est constante sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que :
$f(x) = k$ pour tout $x \in I$

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que $x_1 \neq x_2$.

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tel que : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I si et seulement si pour tout :
$x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$

• On dit que f est strictement décroissante (décroissante) sur I si et seulement s'il pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$

• On dit que f est constante sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

Exemple : Soit f une fonction tel que : $f(x) = 3x^2 + 2$

1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f

Entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Etudier les variations de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

4) Dresser le tableau de variation de f

Solutions : 1) f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a) Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 \neq x_2$ implique $x_1 + x_2 \succ 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \succ 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ et on a $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 \prec 0$ par suite : $3(x_1 + x_2) \prec 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \prec 0$

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation **:** $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'

Conséquences : Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Applications : Soit f une fonction tel que : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I=\left]0;1\right]$ puis sur $J=\left[1;+\infty\right[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solutions : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x\neq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a) Sur $I=\left]0;1\right]$

Soit $x_1\in\left]0;1\right]$ et $x_2\in\left]0;1\right]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a : $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $I=\left]0;1\right]$

b) Sur $J=\left[1;+\infty\right[$: Soient $x_1\in\left[1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[1;+\infty\right[$.

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ par suite : $x_1x_2-1\succ 0$

Et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J=\left[1;+\infty\right[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=\left]0;1\right]$ est l'intervalle $I'=\left[-1;0\right[$ et le symétrique de $J=\left[1;+\infty\right[$ est l'intervalle $J'=\left]-\infty;-1\right]$

Puisque : f est strictement décroissante sur I alors f est strictement décroissante sur I'

Puisque : f est strictement croissante sur J alors f est strictement croissante sur J'

5) par suite le tableau de variations de f sur D_f est :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$f(x)=1+\dfrac{1}{1}=2$

$f(-1)=-1-\dfrac{1}{1}=-2$

V) Les extremums d'une fonction numérique

1) Définitions :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) si et seulement si pour tout $x \in I$: $f(x) \le f(a)$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) si et seulement si pour tout $x \in I$: $f(x) \ge f(a)$

2)Exemples :

1) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$ $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge 0$ Donc $5x^2 \ge 0$ car $5 \succ 0$

Par suite $5x^2 + 3 \ge 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \ge f(0)$

D'où $f(0) = 3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -4x^2 + 1$

$D_g = \mathbb{R}$ et On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \ge 0$

Donc $-4x^2 \le 0$ car $-4 \prec 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \le 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \le g(0)$

D'où $g(0) = 1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

3)Propriétés : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I = [a;b]$ (a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c \in I$

➢ Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I

➢ Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

Exercice7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1)a) Montrer que $f(x) = 6 - (2x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que $f(x) \le 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Solutions : 1) a) On a $D_f = \mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2 = 6-(4x^2-4x+1) = 6-4x^2+4x-1 = -4x^2+4x+5$ Donc : $f(x) = 6-(2x-1)^2$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(2x-1)^2 \ge 0$ par suite $-(2x-1)^2 \le 0$ donc $6-(2x-1)^2 \le 6$

C'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \le 6$

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1-1)^2 = 6$

On a pour tous $x \in \mathbb{R}$: $6-(2x-1)^2 \le 6$ alors/ $f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$

1) On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$

$f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

Donc il suffit d'étudier la monotonie sur $I = [0;+\infty[$

3) Soient $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{ax_1^2-ax_2^2}{x_1-x_2} = \frac{a(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}$$

Donc $T(x_1;x_2) = a(x_1+x_2)$

1iér cas : si $a \succ 0$

On a : $x_1 \in [0;+\infty[$ donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ donc $x_2 \geq 0$

Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 \succ 0$

Et on a : $a \succ 0$ donc sur $[0;+\infty[$ $T(x_1;x_2) \succ 0$

Et alors f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Tableau de variations de f si $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2iér cas : si $a \prec 0$

On a : $x_1 \in]-\infty;0]$ donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ donc $x_2 \leq 0$

Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 \prec 0$

Et on a : $a \prec 0$ donc sur $]-\infty;0]$ $T(x_1;x_2) \prec 0$

Et alors f est strictement décroissante croissante sur $[0;+\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

4° Représentation graphique

Définition : dans un Repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction

$x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Résumé : $x \xrightarrow{f} ax^2$; $f(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$ on a : $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction paire .

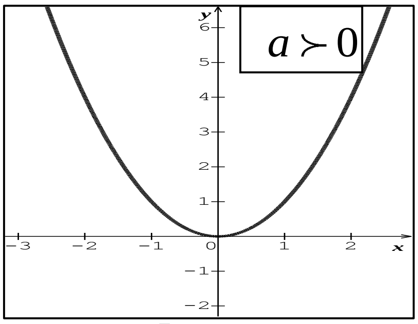
Tableau de variations de f si $a \succ 0$

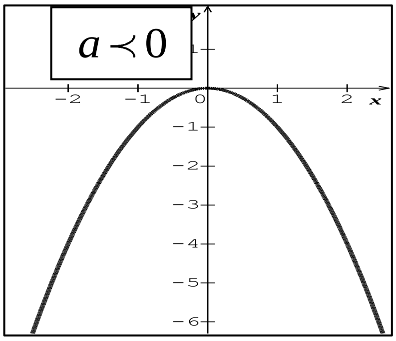
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Dans un Repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées





Exemples : Donner le tableau de variations et représenter la courbe de fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

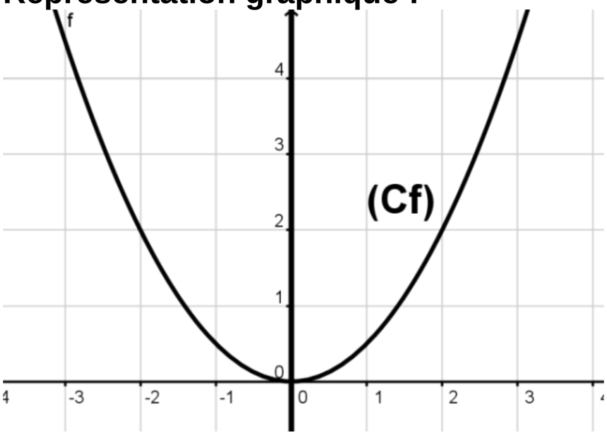
Solutions : **1)** $D_f = \mathbb{R}$ et On a $a = \frac{1}{2} \succ 0$

Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

Représentation graphique :



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

a) On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

b) Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=a(x+\alpha)^2+\beta$

Avec $\Delta=b^2-4ac$ et $\alpha=\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=f(-\alpha)$ et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

3° Les variations de f

Si $a\succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a\prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=2x^2-4x-2$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) On a : f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=2x^2-4x-2=2(x^2-2x)-2=2\left((x-1)^2-1\right)-2=2(x-1)^2-2-2=2(x-1)^2-4$

Donc : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x-1)^2-4$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=-4$ et $a=2$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-4$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-4}{2\times 2}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(-1)=2(-1)^2+4\times(-1)-2=-4$

Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=2(x-1)^2-4$

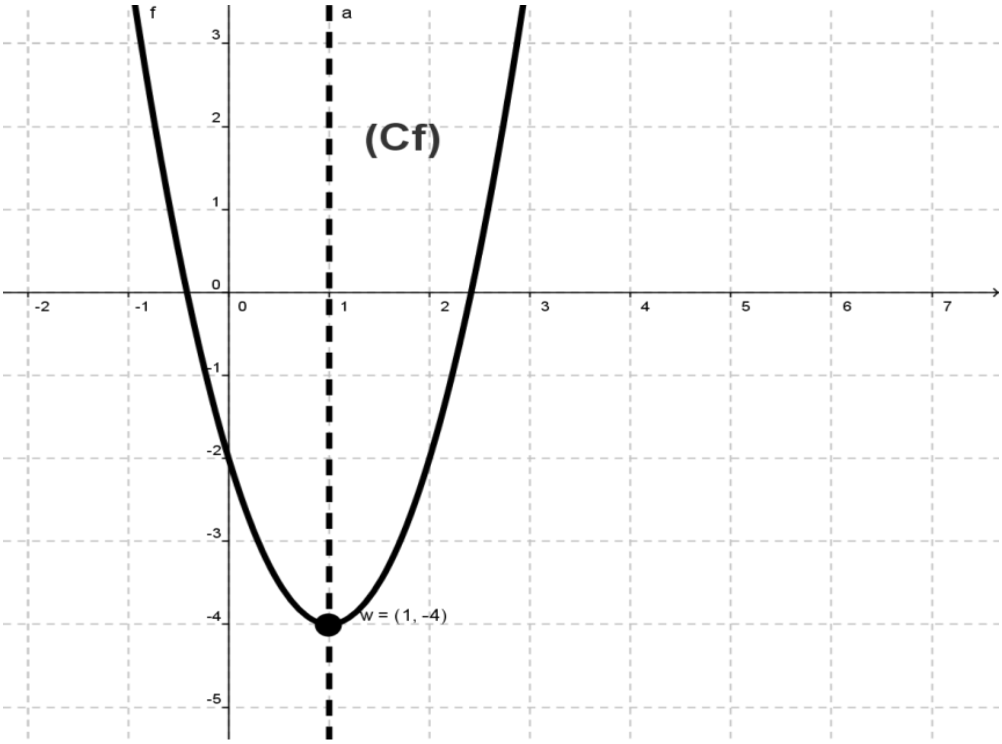
3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$; $W(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

5)

x	1	2	3	4
$f(x)$	-1	-2	4	14



VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x} \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$

Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{a}{x}$

1) La parité de la fonction : On a $f(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x}$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) Les variations de la fonction : Soient $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et $x_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{ax_2 - ax_1}{(x_1 - x_2)(x_1x_2)} = \frac{-a(x_1 - x_2)}{x_1x_2(x_1 - x_2)} = \frac{-a}{x_1x_2}$$

a)Sur $I = \mathbb{R}^{*+}$; Soit $x_1 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ 0$ et $x_2 \succ 0$ Donc $x_1x_2 \succ 0$ alors $\frac{1}{x_1x_2} \succ 0$

1iér cas : si $a \succ 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1x_2} \prec 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T(x_1;x_2) \prec 0$

Et alors f est strictement décroissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement décroissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

2iér cas : si $a \prec 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1x_2} \succ 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T(x_1;x_2) \succ 0$

Et alors f est strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

Résumé : a) Tableau de variations de f

Si $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

si $a \prec 0$

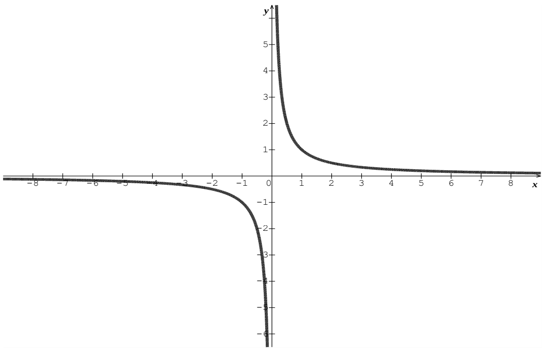
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole

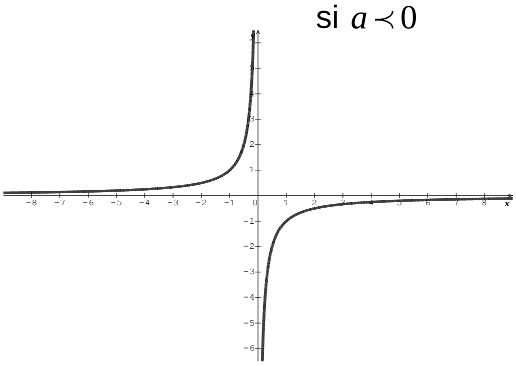
c)Les éléments caractéristiques sont :

- Son centre de symétrie est l'origine du repère
- Ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

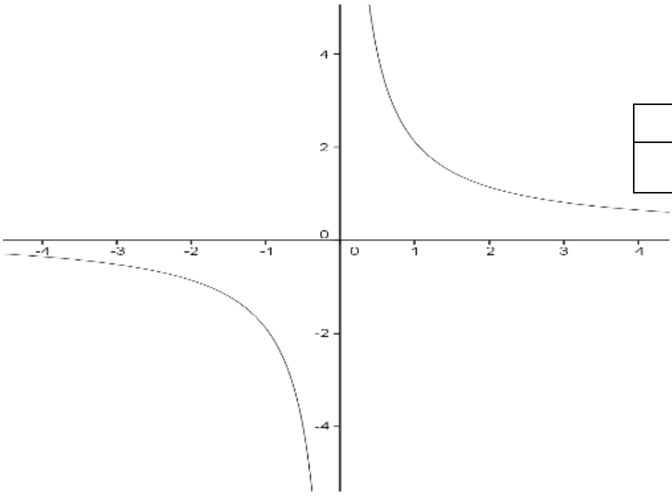
si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



Exemple : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{2}{x}$



x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$

IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$

$a \neq 0$ et $c \neq 0$

1)Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

2) Pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+b/a\right)}{c\left(x+d/c\right)} = \frac{a}{c}\frac{\left(x+d/c-d/c+b/a\right)}{x+d/c}$

$$f(x)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+d/c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+d/c}$$

On pose $\alpha=-\frac{d}{c}$ et $\beta=\frac{a}{c}$ et $\gamma=\frac{-\det f}{c^2}$ avec $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

1)Résumé et propriété : Soit f une fonction homographique tq : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

$a\neq 0$ et $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

- Pour $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ dite forme réduite de $f(x)$
- (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

1iér cas : Si $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	↗

2iér cas : Si $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	↘

Exemple : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie : $x-1\neq 0$ équivaut à : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: la division euclidienne de : $2x+1$ *par* $x-1$ donne :

$$\begin{array}{l|l} 2x+1 & x-1 \\ \hline -2x+2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

3) On a : $f(x)=2+\frac{3}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

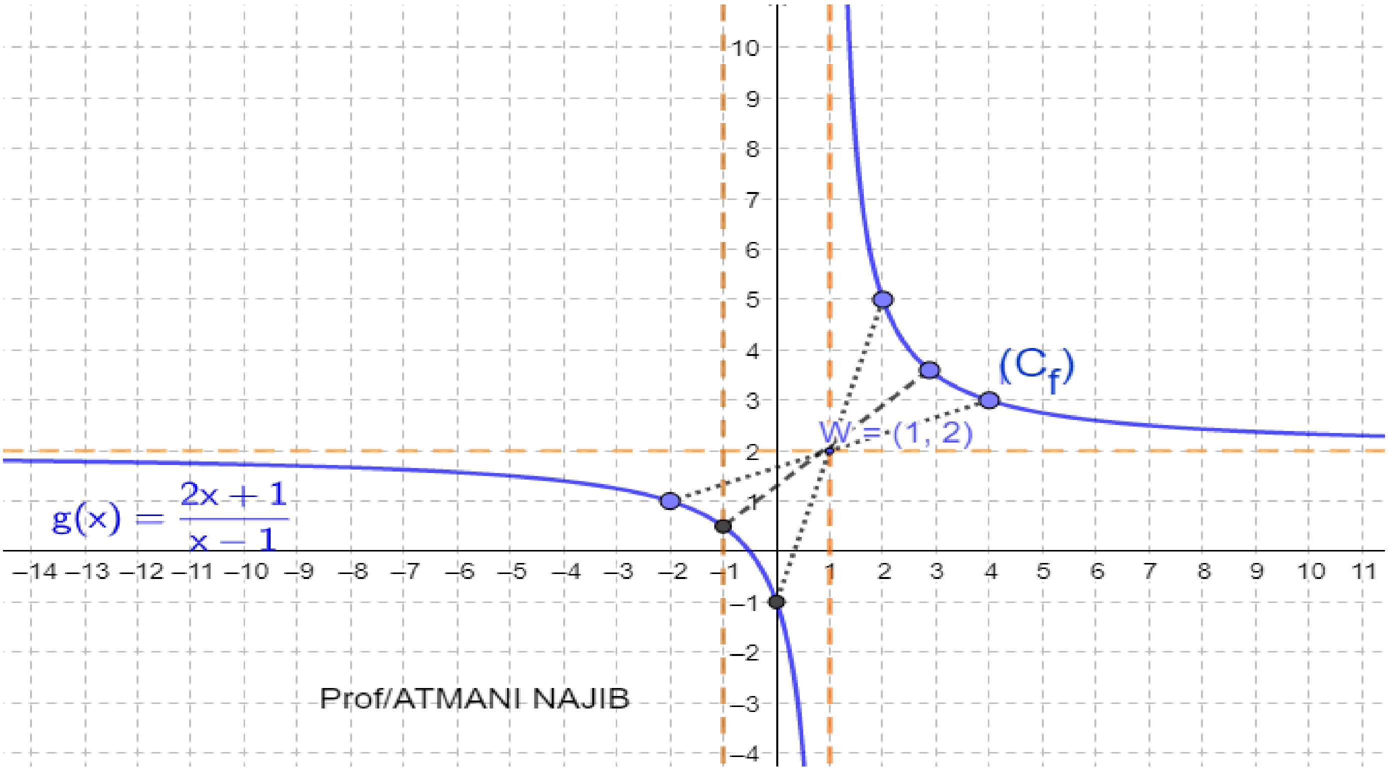
4) $k=3>0$: Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3\prec 0$

5)Représentation graphique : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exercice9: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $0\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ On a : $0\leq f(x)\leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $1\leq f(x)\leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^2+2x+1$ 1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2x_2+1)-(x_1^2+2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+2x_2+1-x_1^2-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors : $x_1\geq -1$ et $x_2\geq -1$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-2$

Par suite : $x_1+x_2+2>0$.

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\leq -1$ et $x_2\leq -1$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\leq f(x)$

Par suite : $0\leq f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-1;3]$ alors : $-1\leq x\leq 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$ et comme : $f(-1)=0$ et $f(3)=3^2+2\times3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\leq f(x)\leq 16$

b) Soit : $x \in [-5;-2]$ On a alors : $-5 \le x \le -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2) \le f(x) \le f(-5)$ et comme :

$f(-5) = (-5)^2 + 2\times(-5)+1 = 25-10+1 = 16$ Et $f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2)+1 = 4-4+1 = 1$

Par suite : $1 \le f(x) \le 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2 = 0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

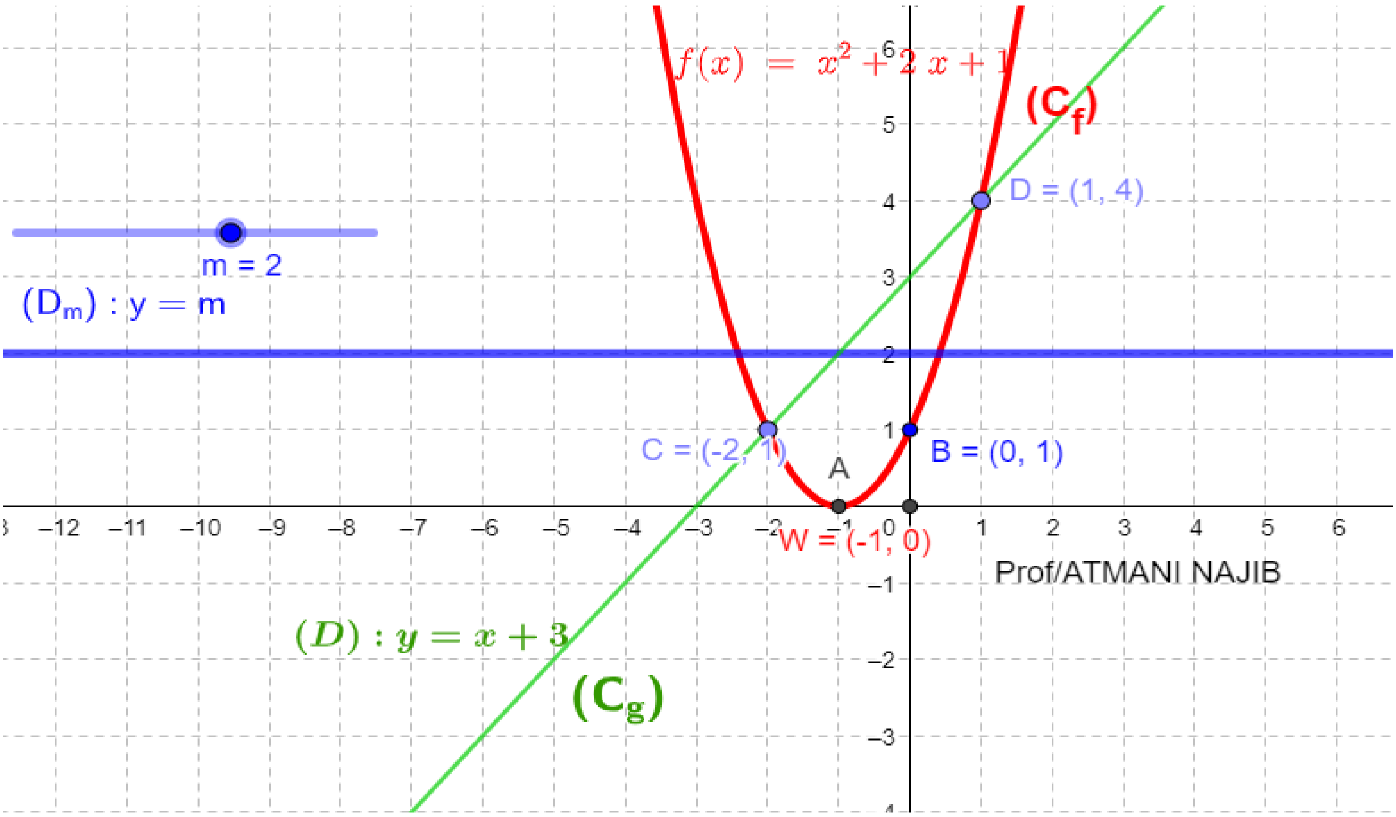
Et on a $f(0) = 0^2 + 2\times 0 + 1 = 1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2+2x+1=x+3$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Donc : $S=\{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)<f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x\in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)<f(x)$:

$g(x)<f(x)$ Signifie $x+3<x^2+2x+1$

C'est-à-dire : $x^2+x-2>0$

Les racines sont : $x_1=1$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m=x^2+2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m>0$ il y'a deux solutions

Exercice 10 : On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\frac{x}{x-2}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique

b) Dresser le tableau de variation de g

5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

7)Tracer les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans le même repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$

10)Soit h la fonction définie par : $h\left(x\right)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h

b) Montrer que la fonction h est paire

c)Vérifier que $h\left(x\right)=g\left(x\right)$pour tout x de$\mathbb{R}^+-\{2\}$

11)Tracer la courbes $\left(C_h\right)$ de h et $\left(C_g\right)$ dans un même repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

12)Soit K la fonction définie par : $K\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$

a) Tracer la courbes $\left(C_K\right)$ de K dans le même repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K\left(x\right)=m$

Solution :1) $f\left(x\right)=x^2-2x$ et$g\left(x\right)=\dfrac{x}{x-2}$

Dans l'expression de $f\left(x\right)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g\left(x\right)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que :$x-2=0$soit$x=2$

Donc :$D_g=\mathbb{R}-\{2\}=\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

2) a) Vérifions que : $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2-1$si $x\in\mathbb{R}$

$f\left(x\right)=x^2-2x=x^2-2x+1^2-1^2=x^2-2\times x\times1+1^2-1^2$

Donc : $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2-1$(la forme canonique)

b) Vérifions que : $g\left(x\right)=1+\dfrac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

$1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x-2+2}{x-2}=\dfrac{x}{x-2}=g\left(x\right)$(La forme réduite)

3)a) <u>Méthode1 :</u> On a :$a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $f\left(x\right)=x^2-2x$ $\left(f\left(x\right)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times1}=-1$ et $\beta=f\left(-\alpha\right)=f\left(1\right)=1^2-2\times1=-1$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe$\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(-\alpha;\beta\right)=W\left(1;-1\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Méthode2 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f\left(x\right)=a\left(x+\alpha\right)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe$\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(-\alpha;\beta\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2-1$si $x\in\mathbb{R}$: $\alpha=-1$ et $\beta=-1$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-(-1);-1)$ c'est-à-dire : $W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-(-1)=1$

b) Le tableau de variations de f : $a=1>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4)a) Méthode1 :On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1+\frac{2}{x-2}$ avec : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=2>0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=2$ et $y=1$

Et puisque : $k=2>0$ alors : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

Méthode2 : (on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$\det g=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

$g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\dfrac{x}{x-2}=0$

Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\dfrac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$(C_g)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

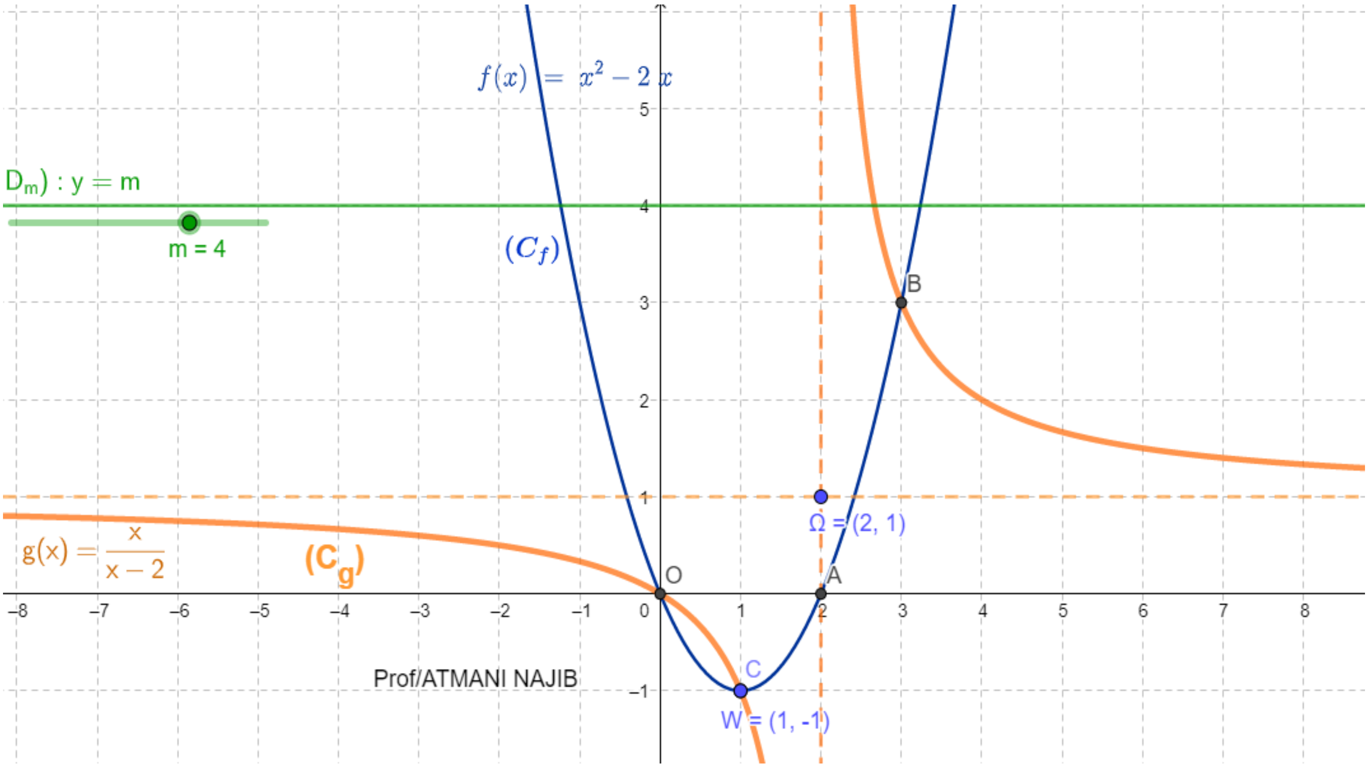
7)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C_g) :

-2	**-1**	**0**	**2**	**3**	4	4
5/3	2	3		3	2	5/3

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x$

x	2	3	4
$f(x)$	0	3	8



8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\frac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\frac{x}{x-2}=0$

Signifie que : $x\left(x-2-\frac{1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\frac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

10)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- $h(-x)=\dfrac{|-x|}{|-x|-2}=\dfrac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

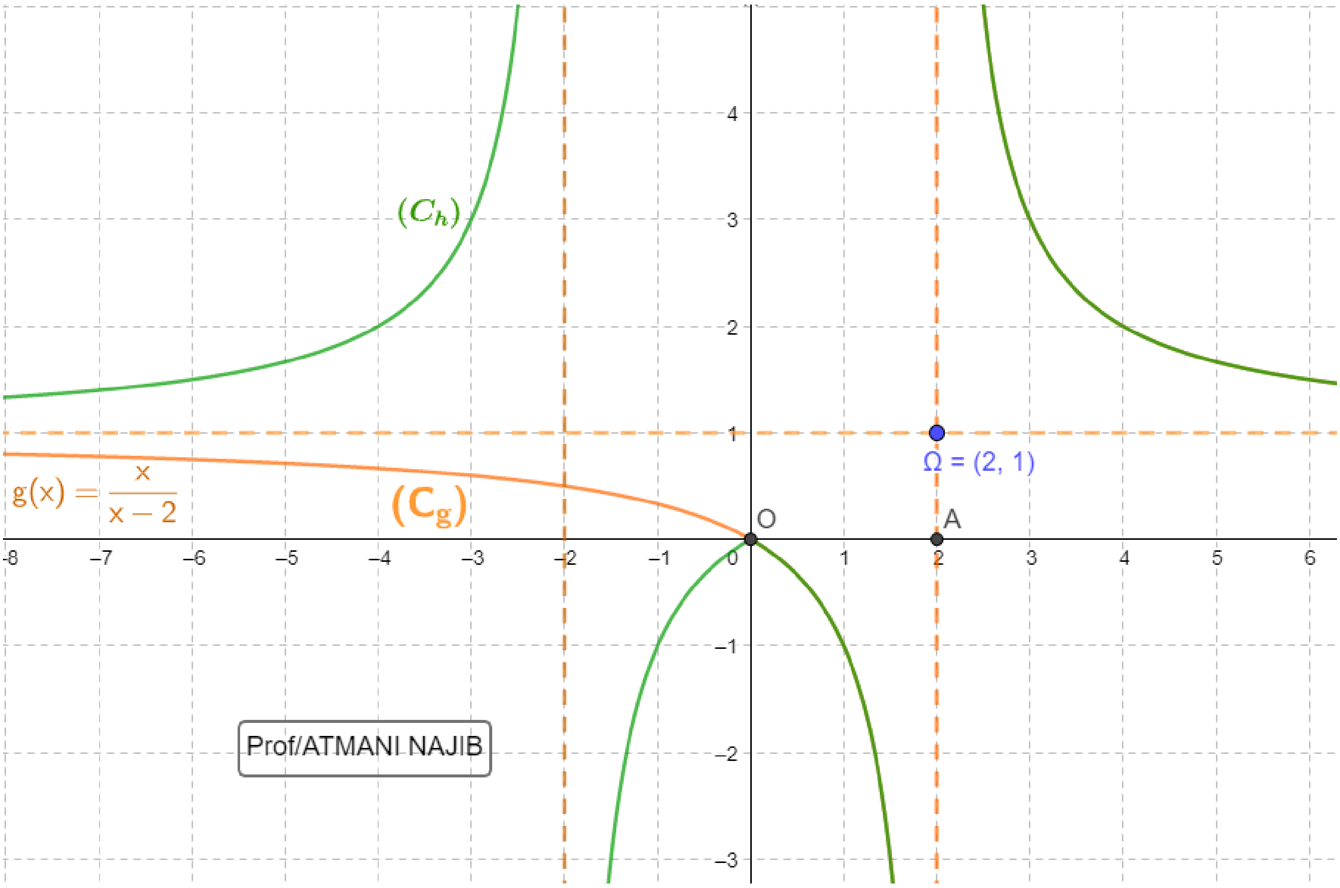
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^+-\{2\}$ on a : $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}=\dfrac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

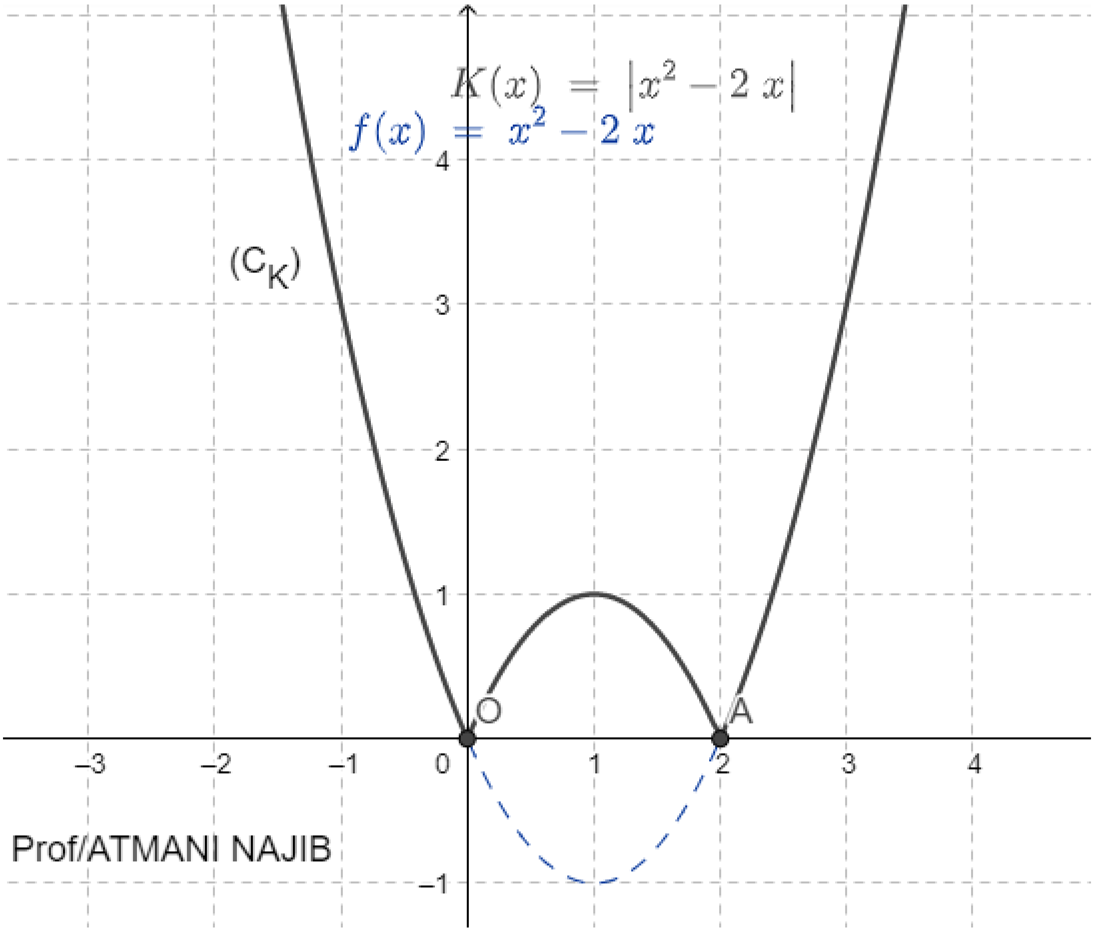
Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

11) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

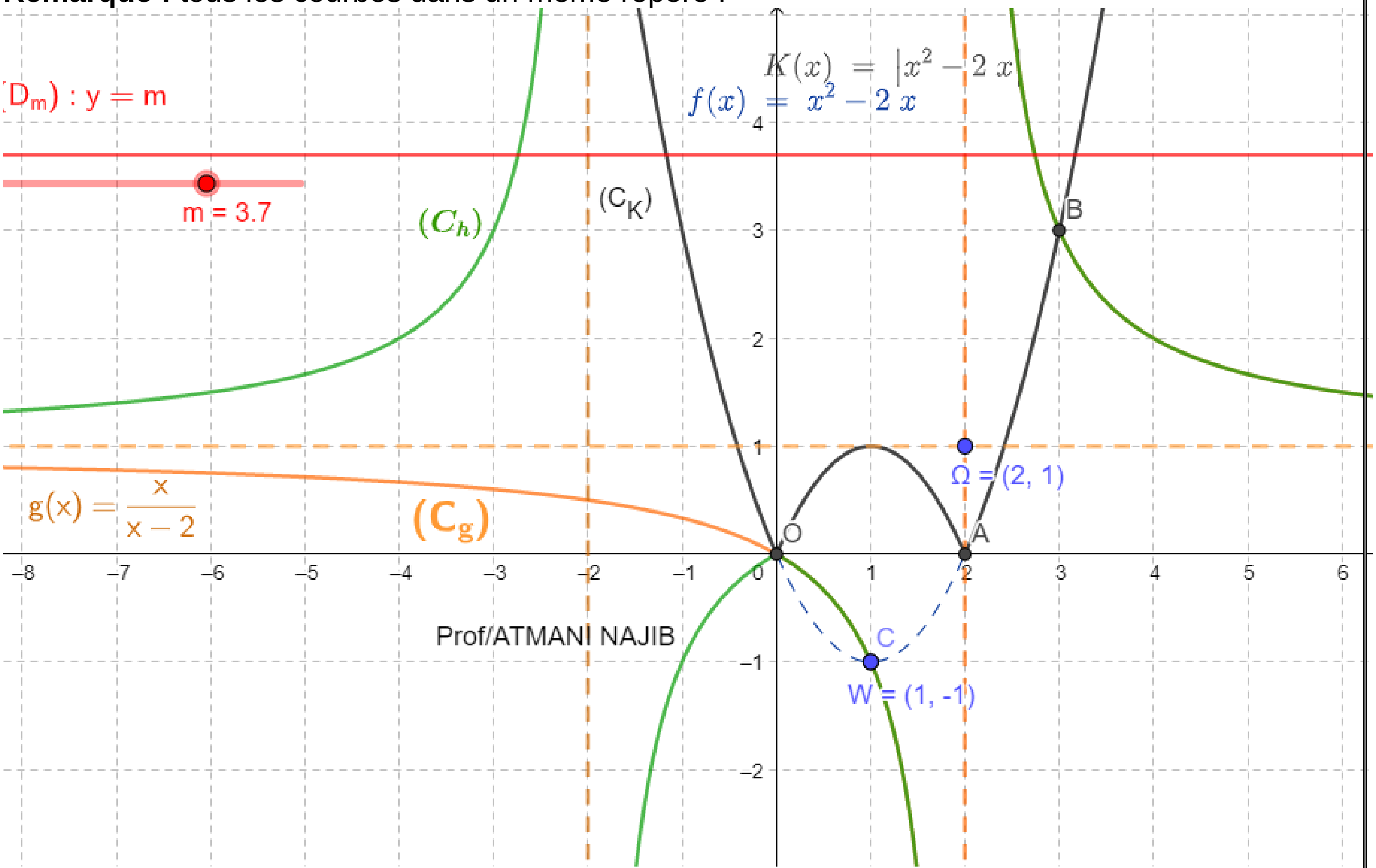


12)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m) \quad y=m$

- ▻ Si $m<1$: l'équation n'a pas de solutions
- ▻ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions
- ▻ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions
- ▻ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions
- ▻ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien