Cours avec Exercices avec solutions PROF : ATMANI NAJIB

Tronc commun Sciences BIOF

http:// www.xriadiat.com

Leçon L'ordre dans $\mathbb{R}$

Présentation globale le

I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (Ou s'ils sont égaux).

Activités : I) Comparer les réels suivants :1) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$ 2) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 3) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

II) Soient a et *b* deux réels tel que : $a \le b$

Comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) Soient a et *b* deux réels strictement positifs tel que $a \le b$

Comparer : 1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ 3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

IV) Soient a et *b* deux réels négatifs tel que : $a \le b$; Comparer : a^2 et b^2

Corrigé : I) Comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a* – *b*.

1) On compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$: $\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$

Donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\ge-\frac{15}{4}$

2) On compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$: $\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$

Donc : $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$ ou $\frac{-12}{7}\le\frac{15}{4}$

3) On compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$:

On a : $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et $50-20=30>0$

Et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors : $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

II) Soient a et *b* deux réels tel que : $a \le b$

1) On compare $5a$ et $5b$: on a : $5a-5b=5(a-b)$ Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$

Et on a : $5>0$ donc : $5a\le 5b$.

2) On compare $-13a$ et $-13b$:

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$

Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$

Et on a aussi : $-13<0$ donc $-13a\ge -13b$

III) Soient a et *b* deux réels strictement positifs Tel que : $a\le b$

1) On compare a^2 et b^2 :

On a : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ et on a : *a* et *b* deux réels strictement positifs donc $a+b\ge 0$

Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$

Alors : $(a-b)(a+b)\leq 0$ D'où $a^2\leq b^2$

2) On compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

On a : $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$.
Et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

Donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq 0$ d'où : $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

3) On compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: on a : $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

Et on a : $a\leq b$ alors $b-a\geq 0$ et puisque :a et *b* deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs.

Donc : $\frac{b-a}{ab}\geq 0$ d'où : $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

IV) Soient a et *b* deux réels strictement négatifs tel que $a\leq b$ On compare : a^2 et b^2 :
On a : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Et on a : *a* et *b* deux réels négatifs donc $a+b\leq 0$
Et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$ par suite : $(a-b)(a+b)\geq 0$ D'où $a^2\geq b^2$.

1)Définition : Soient a et b deux réels.
$a\leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^+$ ou $b-a\geq 0$

$b\geq a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^+$ ou $b-a\geq 0$

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a>0$
a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a<0$
Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a – b*.
Remarque : voici des Méthodes pour comparer deux nombres

- *Première méthode*

Pour comparer deux nombres a et b, une méthode consiste à calculer la différence de ces deux nombres, puis à étudier le signe de cette différence.
Exemple : On veut comparer les nombres $(a + b)^2$ et 4ab où a et b sont deux réels quelconques :
$(a + b)^2 - 4ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab = a^2 - 2ab + b^2$
$= (a - b)^2 \geq 0$
Donc $(a + b)^2 \geq 4ab$.

- Deuxième méthode

Pour comparer deux nombres a et b de même signe, avec, par exemple, des radicaux, une autre méthode consiste à comparer leurs carrés. (Attention au signe de : a et b)
Exemple : Comparer : $3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$.
On a : $3\sqrt{5}\in\mathbb{R}^+$ et $5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$
Et on a : $\left(3\sqrt{5}\right)^2=9\times 5=45$; $\left(5\sqrt{2}\right)^2=25\times 2=50$ et puisque : $50\succ 45$ alors : $5\sqrt{2}\succ 3\sqrt{5}$

- Troisième méthode *:*

Pour comparer deux nombres a et b strictement positifs, une troisième méthode consiste à calculer le quotient $\frac{a}{b}$ puis comparer ce quotient à 1.

Dans certains cas : il peut être utile de combiner plusieurs de ces méthodes pour arriver à la conclusion.
Exercice1 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; On pose : $a=\sqrt{9n^2+4}$ et $a=3n+2$
Comparer les nombres : a et b
Corrigé : Pour comparer deux nombres positifs on compare leurs carrés :

On a: $a^2=\left(\sqrt{9n^2+2}\right)^2=9n^2+2$ et $b^2=(3n+2)^2=9n^2+12n+4$

$b^2-a^2=9n^2+12n+4-(9n^2+4)$

$b^2-a^2=9n^2+12n+4-9n^2-4=12n>0$ Car $n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $b^2>a^2$ et par suite $b>a$; car $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$

Exercice2 : Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$ Comparer : $x=\frac{2a+3b}{2a}$ et $y=\frac{12b}{2a+3b}$

Corrigé : On a : $x-y=\frac{2a+3b}{2a}-\frac{12b}{2a+3b}$

Donc : $x-y=\frac{(2a+3b)^2-24a\times b}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\frac{4a^2+12ab+9b^2-24a\times b}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\frac{4a^2-12a\times b+9b^2}{2a(2a+3b)}=\frac{(2a)^2-2\times 2a\times 3b+(3b)^2}{2a(2a+3b)}$

Donc : $x-y=\frac{(2a-3b)^2}{2a(2a+3b)}\in\mathbb{R}^+$ Car : $2a(2a+3b)\in\mathbb{R}^{+*}$ et $(2a-3b)^2\in\mathbb{R}^+$

D'où : $x\geq y$

II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

1) L'ordre et l'addition

Propriété : Soient a et b et c trois nombres réels

✓ Si $a\leq b$ alors $a+c\leq b+c$ et $a-c\leq b-c$

✓ Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$

(On peut ajouter membre a membre deux inégalités de même sens)

Remarque : On ne peut pas retrancher membre a membre deux inégalités de même sens

Exemple : On a : $4\leq 6$ et $2\leq 6$ mais $4-2>6-6$

2) L'ordre et la multiplication

Propriétés :

1) $ab\geq 0$ ssi $a\geq 0$ ou $b\geq 0$ ou $a\leq 0$ ou $b\leq 0$

(Le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

2) si $a\leq b$ et $c\geq 0$ alors $ac\leq bc$

Si $a\leq b$ et $c\leq 0$ alors $ac\geq bc$

3) si $0\leq a\leq b$ et $0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$

si $0\leq a\leq b$ alors $a^2\leq b^2$ et $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

4) si $a\leq b\leq 0$ alors $a^2\geq b^2$

5) si $ab>0$ on a : si $a\leq b$ alors $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$ (Autrement dit, deux nombres strictement positifs ou strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exemple : Soit x un réel tel que : $x\geq\frac{-5}{3}$

Comparer : 11 et $-3x+\frac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a : $x\geq\frac{-5}{3}$ donc : $x\times(-3)\leq\frac{-5}{3}\times(-3)$ c'est à dire : $-3x\leq 5$

Donc : $-3x+\frac{1}{2}\leq 5+\frac{1}{2}$ c'est à dire : $-3x+\frac{1}{2}\leq\frac{11}{2}$

Donc : ① $-3x+\frac{1}{2}\leq\frac{11}{2}$ et on sait que : $\frac{11}{2}<11$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-3x+\frac{1}{2}<11$

III)La valeur absolue et propriétés

1) Définition : Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit M le point d'abscisse x

Sur un axe normé (gradué)

La valeur absolue de *x est la distance* OM et on note : $|x|$ et on a : $OM=|x|$ (O l'origine de l'axe)

2) Conséquence : $x\in\mathbb{R}$

Si $x\geq 0$ alors $|x|=x$ et Si $x\leq 0$ alors $|x|=-x$

Exercice3 : Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

1) $\left|-3+\frac{1}{2}\right|$ 2) $\left|\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right|$ 3) $\left|-\sqrt{3}-11\right|$ 4) $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|$

5) $A=\left|5-2\sqrt{3}\right|+\left|6-4\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|$

Corrigé : 1) $\left|-3+\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{5}{2}\right|=-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

2) $\left|\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ car $\sqrt{5}+\frac{1}{2}>0$

3) $\left|-\sqrt{3}-11\right|=\left|-\left(\sqrt{3}+11\right)\right|=\left|\sqrt{3}+11\right|$ car $|-X|=|X|$

Donc : $\left|-\sqrt{3}-11\right|=\left|\sqrt{3}+11\right|=\sqrt{3}+11$ car : $\sqrt{3}+11>0$

4) $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|$

On compare : $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{3}$

On a : $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ donc $3\sqrt{3}>2\sqrt{5}$

Par suite $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$ Donc $\left|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right|=-\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

5) $A=\left|5-2\sqrt{3}\right|+\left|6-4\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|$

On a : $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $(5)^2=25$ donc $5>2\sqrt{3}$ par suite $\left(5-2\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $\left|5-2\sqrt{3}\right|=5-2\sqrt{3}$

On a : $\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$ et $(6)^2=36$ donc $5>2\sqrt{3}$ par suite $\left(6-4\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$

Donc : $\left|6-4\sqrt{3}\right|=-\left(6-4\sqrt{3}\right)$

On a : $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $1^2=1$ donc $2\sqrt{3}>1$ par suite $\left(2\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $\left|2\sqrt{3}-1\right|=2\sqrt{3}-1$

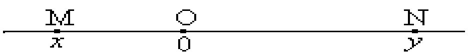
Donc : $A=5-2\sqrt{3}-\left(6-4\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}-1\right)$

Donc : $A=5-2\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1$

Donc : $A=0$

3)Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives a et b sur un axe normé(gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note $AB = |a-b|$

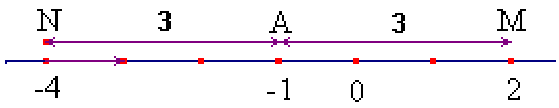


Remarque : $AB = BA$ donc $|a-b| = |b-a|$

Exemples :

$MN = |2-(-4)| = |2+4| = |6| = 6$ $\quad AM = |2-(-1)| = |3| = 3$

$AN = |-1-(-4)| = |-1+4| = |3| = 3$



<u>4)Propriétés :</u> Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$ alors on a :

$|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x^2| = |x|^2 = x^2$; $-|x| \leq x \leq |x|$ $\quad \sqrt{x^2} = |x|$; $|x \times y| = |x| \times |y|$; $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$

si $y \neq 0$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité du Triangle)

$|x| = a$ Équivaut à dire que : $x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y|$ Équivaut à dire que : $x = y$ ou $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que : $x = 0$

Applications :(*Résolution des équations)*

Résoudre les équations suivantes : 1) $|x-1| = 2$ $\quad$ 2) $|3x+2| = |x-4|$ $\quad$ 3) $3|x+5| = -\frac{1}{2}$

4) $|x-1| + |2-x| - 3 = 0$

Corrigé : 1) $|x-1| = 2$ Signifie que : $x-1 = 2$ ou $x-1 = -2$

Signifie que : $x = 3$ ou $x = -1$ Donc : $S = \{-1;3\}$

2) $|3x+2| = |x-4|$ signifie que : $3x+1 = x-4$ ou $3x+2 = -(x-4)$

Signifie que : $3x+1 = x-4$ ou $3x+2 = -x+4$

Signifie que : $2x = -5$ ou $4x = 2$

Signifie que : $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

3) $3|x+5| = -\frac{1}{2}$ Signifie que : $|x+5| = -\frac{1}{6}$

$S = \varnothing$ $\quad$ Car $|x+5| \geq 0$ et $-\frac{1}{6} < 0$

4) $|x-1| + |3-x| - 3 = 0$

$x-1 = 0$ Signifie que : $x = 1$

$3-x = 0$ Signifie que : $x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0 $+$	$+$	
$\|x-1\|$	$-x+1$	0 $x-1$	$x-1$	
$3-x$	$+$	$+$	0 $-$	
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$	0 $x-3$	
$\|x-1\|+\|3-x\|-3$	$1-2x$	-1	$2x-7$	

Si : $x \leq 1$ alors : L'équation $|x-1| + |3-x| - 3 = 0$

devient : $-(x-1) + (3-x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $4 - 2x - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $x = \frac{1}{2} \leq 1$; Donc : $S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1 \leq x \leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2 = \varnothing$

Si : $x \geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2} \geq 3$ Donc : $S_3 = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$

Exercice4 : 1) Calculer $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2$ et comparer : $6\sqrt{2}$ et 9.

2) Simplifier $\sqrt{153-108\sqrt{2}}$.

Corrigé : 1) $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 6\sqrt{2}\times 9 + 9^2 = 72-108\sqrt{2}+81$

Donc : $\left(6\sqrt{2}-9\right)^2 = 153-108\sqrt{2}$

On a : $\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$ et $9^2 = 81$ donc $9 > 6\sqrt{2}$ Par suite : $6\sqrt{2}-9 \in \mathbb{R}^-$

2) $\sqrt{153-108\sqrt{2}} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}-9\right)^2} = \left|6\sqrt{2}-9\right| = -\left(6\sqrt{2}-9\right)$ car $6\sqrt{2}-9 \in \mathbb{R}^-$

Par suite : $\sqrt{153-108\sqrt{2}} = 9-6\sqrt{2}$

IV)Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

Les intervalles réels sont des parties de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Leur représentation sur la droite numérique est un segment ou une droite dont les extrémités peuvent être exclues. C'est d'ailleurs ce qui fait qu'un intervalle est ouvert ou fermé.

□ La notation +□ se lit "plus l'infini". Contrairement à ce que l'on pourrait croire, +□ n'est pas un nombre. C'est juste un symbole pour désigner le "bout positif et infiniment grand" de l'ensemble des réels.

□ La notation -□ se lit elle "moins l'infini".

1) Les différents types d'intervalles :

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que : a □ b.

Notation	Représentation sur la droite réelle	Ensemble des réels x tels que	Appellation
[a ; b]		$a \leq x \leq b$	**Intervalle fermé borné**
[a ; b[		$a \leq x < b$	**Intervalle semi -ouvert (Fermé en a et ouvert en b)**
] a ; b]		$a < x \leq b$	**Intervalle semi-ouvert (Ou ouvert à gauche et fermé à droite)**
] a ; b [		$a < x < b$	**Intervalle ouvert borné.**
] $-\infty$; b]		$x \leq b$	**Intervalle non borné fermé en b (ou fermé à droite)**

]−∞ ; b [		$x<b$	**Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)**
[a ; +∞ [		$a\leq x$	**Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)**
]a ; +∞ [		$a<x$	**Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à gauche)**

2) Quelques remarques sur ce tableau :

La notation {x tels que a < x < b} désigne l'ensemble des réels x tels que a < x < b (sous-entendu qui sont strictement plus grand que a et strictement inférieur à b).

Le fait de dire qu'un intervalle est par exemple ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.

Du côté de -∞ et de +∞, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi :]-∞ ; +∞[.

$\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$

Exercice5 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$2...[2;6[$; $6...[2;6[$; $3...[1;+\infty[$; $100....[0;+\infty[$; $-1....]-\infty;1]$; $\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}...[0;3[$

$\{0;1;200\}...]0;+\infty[$; $]0;1[....\mathbb{Q}$.

Corrigé : $2\in[2;6[$; $6\notin[2;6[$; $3\in[1;+\infty[$; $100\in[0;+\infty[$; $-1\notin]-\infty;1]$; $\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}\subset[0;3[$

$\{0;1;200\}\not\subset]0;+\infty[$ car $0\in\{0;1;200\}$ *et* $\notin]0;+\infty[$; $]0;2[\not\subset\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}\in]0;2[$ *et* $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

3) Réunion et intersection d'intervalles :

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Exercice6 : Calculer : $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants : 1) $J=[-1,+\infty[$ et $I=]-3,7]$

2) $J=[4;10]$ et $I=]-\infty,5[$

3) $J=[-5;-1]$ et $I=[0,10[$

4) $I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Corrigé : 1) $I\cap J=]-1,7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$

2) $I\cap J=[4,5[$ et $I\cup J=]-\infty;10]$

3) $I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=[-5;10]$

4) $I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=]-1,2]$

Exercice7 : Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq-2\\x>0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x>6\\x\leq2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x\geq-1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-2\leq x\leq5\\-5<x<6\end{cases}$

Corrigé : $\{$ c'est l'intersection 1) $\begin{cases}x\geq-2\\x>0\end{cases}$

$x\geq-2$ Signifie que : $x\in[-2,+\infty[$ et $x>0$ Signifie que : $x\in]0,+\infty[$

Donc : $S = \left]0,+\infty\right[\cap \left[-2,+\infty\right[= \left]0,+\infty\right[$

2) $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$ On a : $x \leq 2$ Signifie que : $x \in \left]-\infty, 2\right]$ et $x > 6$ Signifie que : $x \in \left]6,+\infty\right[$

Donc : $S = \left]6,+\infty\right[\cap \left]-\infty, 2\right] = \varnothing$

3) $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$; $x > \dfrac{1}{2}$ Signifie que : $x \in \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et $x \geq -1$ Signifie que : $x \in \left[-1,+\infty\right[$

Donc : $S = \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[\cap \left[-1,+\infty\right[= \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

4) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$

$-2 \leq x \leq 7$ Signifie que : $x \in \left[-2;7\right]$ et $-5 < x < 6$ Signifie que : $x \in \left]-5;6\right[$

Donc : $S = \left]-5;6\right[\cap \left[-2;7\right] = \left[-2;6\right[$

4) <u>Milieu et amplitude et rayon d'un intervalle :</u> Soient *a*, *b* deux nombres réels tels que : $a \leq b$.
On pose $I = \left[a;b\right]$ ou $I = \left]a;b\right[$ ou $I = \left[a;b\right[$ ou $I = \left]a;b\right]$.

Le réel $\dfrac{a+b}{2}$ est le **milieu** de l'intervalle I et Le réel $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle I

Le réel $\dfrac{b-a}{2}$ est le **rayon** de l'intervalle I

Exemple : On considère l'intervalle $I = \left[-8;2\right]$; Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Corrigé : $\dfrac{-8+2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ Est le milieu de l'intervalle I .

$2-(-8) = 10$ Est l'amplitude de l'intervalle I .

$\dfrac{2-(-8)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ Est le rayon de l'intervalle I .

5) Les intervalles et la valeur absolue :

Propriété : $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$|x| < r$ Signifie $-r < x < r$

$|x| \leq r$ Signifie $-r \leq x \leq r$ Signifie que : $x \in \left[-r;r\right]$

$|x| \geq r$ Signifie que : $r \leq x$ ou $x \leq -r$

Applications : *(Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ 2) $|2x-3| < 1$ 3) $|x+3| > \dfrac{4}{7}$

Corrigé : 1) $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ Signifie que : $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

Donc : $S = \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

2) $|2x-3| < 1$ Signifie $-1 < 2x-3 < 1$ Signifie que : $-1+3 < 2x-3+3 < 1+3$

Signifie que : $2 < 2x < 4$ Signifie $2\times\dfrac{1}{2} < 2x\times\dfrac{1}{2} < 4\times\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire que : $1 < x < 2$ donc : $S = \left]1;2\right[$

3) $|x+3| > \dfrac{4}{7}$ Signifie $x+3 > \dfrac{4}{7}$ ou $x+3 < -\dfrac{4}{7}$

Signifie $x > \frac{4}{7} - 3$ ou $x < -\frac{4}{7} - 3$

Signifie $x > -\frac{17}{7}$ ou $x < -\frac{25}{7}$

Donc $S = \left]-\infty; -\frac{25}{7}\right[\cup \left]-\frac{17}{7}; +\infty\right[$

IV) L'encadrement et la valeur approchée

1) Encadrement :

2) Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proches a et b
Tel que, a < x < b ou a ≤ x ≤ b ou a <x ≤ b ou a ≤ x < b
Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude : b-a
Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.
a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)
b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

Exemple : x est un réel tel que : $x \in [-2;3]$

On pose : $A = -5x + \frac{1}{2}$. Trouver un encadrement de A et trouer son amplitude

Corrigé : $x \in [-2;3]$ Signifie que : $-2 \le x \le 3$

Signifie que : $-15 \le -5x \le 10$

Signifie que : $-15 + \frac{1}{2} \le -5x + \frac{1}{2} \le 10 + \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{29}{2} \le A \le \frac{21}{2}$: encadrement de A

$\frac{21}{2} - \left(-\frac{29}{2}\right) = \frac{21}{2} + \frac{29}{2} = \frac{50}{2} = 25$: est l'amplitude de l'encadrement

2) Encadrements et opérations.

<u>a) Encadrements et additions</u> : Considérons deux réels x et y tels que : $a < x < b$ et $c < y < d$
Alors : on a : a+c < x+y < b+d.

<u>Remarque</u> **:** Pour encadrer le résultat d'une différence : a-b
On commencera par encadrer - b avant…

<u>b) Encadrements et multiplications :</u> Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :
$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
Le produit xy est alors encadrée par ac et bd : c'est-à-dire : $ac < xy < bd$.
Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

Remarque : *Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

3) Valeur approchée d'un nombre.

a) Soit : a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque : $|x - a| \le r$.

b) Soit : a et x deux nombres et r un nombre strictement positif.
On dit que : a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près
(ou à la précision r), par défaut, lorsque : $a \le x \le a + r$.
On dit que : a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque : $a - r \le x \le a$.

Exemple : 1) On a $1{,}38 < \sqrt{2} < 1{,}42$ donc $1{,}40 - 0{,}02 < \sqrt{2} < 1{,}40 + 0{,}02$

$-0{,}02 < \sqrt{2} - 1{,}40 < 0{,}02$ Donc : $\left|\sqrt{2} - 1{,}40\right| < 0{,}02$

Donc : $1{,}40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0{,}02$ près

2) On a $1{,}40 \le \sqrt{2} < 1{,}40 + 0{,}02$ donc $1{,}40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0{,}02$ près

3) On a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

4) Approximation décimale : Soit $x\in\mathbb{R}$ et $N\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}$

Si $N\times10^{-p}\leq x\leq(N+1)\times10^{-p}$ alors :

$N\times10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près.

$(N+1)\times10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près.

Exemple : On a $0,333333<\frac{1}{3}<0,333334$ donc $333333\times10^{-6}<\frac{1}{3}<(333333+1)\times10^{-6}$

333333×10^{-6} Est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1)\times10^{-6}$ Est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

Exercice8 : Soient a et b deux réels tels que : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ et $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$

1) Montrer que : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé : 1) a) Montrons que : $3<a<7$

On a : $\left|\frac{3a-11}{a-2}\right|<2$ donc : $-2<\frac{3a-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3a-6+6-11}{a-2}<2$

Donc : $-2<\frac{3(a-2)-5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2<\frac{3(a-2)}{a-2}-\frac{5}{a-2}<2$

Donc : $-2<3-\frac{5}{a-2}<2$ c'est-à-dire : $-2-3<-\frac{5}{a-2}<2-3$

Donc : $-5<-\frac{5}{a-2}<-1$ c'est-à-dire : $1<\frac{5}{a-2}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<\frac{a-2}{5}<1$ c'est-à-dire : $1<a-2<5$

Donc : $\boxed{3<a<7}$

b) Montrons que : $-6<b<-2$

On a : $\left|\frac{2b-3}{b+1}-5\right|<2$ donc : $-2<\frac{2b-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)-2-3}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<\frac{2(b+1)}{b+1}-\frac{5}{b+1}-5<2$ c'est-à-dire : $-2<2-\frac{5}{b+1}-5<2$

Donc : $-2<-\frac{5}{b+1}-3<2$ c'est-à-dire : $1<-\frac{5}{b+1}<5$

Donc : $\frac{1}{5}<-\frac{b+1}{5}<1$ c'est-à-dire : $-1<\frac{b+1}{5}<-\frac{1}{5}$

Donc : $-5<b+1<-1$ c'est-à-dire : $\boxed{-6<b<-2}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3+(-6)<a+b<7+(-2)$

Donc : $-3<a+b<5$

Donc : $-3+1<a+b+1<5+1$

Donc : $\boxed{-2<a+b+1<6}$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3<a<7$ et $-6<b<-2$

Donc : $3<a<7$ et $2<-b<6$

Donc : $6<-ab<42$

Donc : $\boxed{-42<ab<-6}$

3) Déduirons une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3<a<7$ donc $6<2a<14$ et $-6<b<-2$

$0<2a+b<12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2=4a^2+4ab+b^2-2a^2-b^2-3ab=2a^2+ab=a(2a+b)$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b)>0$

Par suite : $(2a+b)^2-\sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2>0$

Alors : $\boxed{2a+b>\sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

Exercice9 : Sachant que : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près et $2,25$ est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près

1) Donner un encadrement des réels a et b

2) Donner un encadrement des réels suivants a) $a+b$ b) $a-b$ c) $A=\frac{a+1}{a^2+a+2}$

Corrigé : 1) a) On a : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près donc : $\left|a-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{3}$

$\left|a-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{3}$ Signifie que : $-\frac{2}{3}<a-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$

Signifie que : $-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}<a-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}<\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

Signifie que : $\boxed{-\frac{1}{3}<a<1}$

b) $2,25$ est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près donc : $|b-2;25|<5\times10^{-2}$

$|b-2;25|<5\times10^{-2}$ Signifie que : $-5\times10^{-2}<b-2;25<5\times10^{-2}$

Signifie que : $-5\times10^{-2}+2,25<b<5\times10^{-2}+2,25$

Signifie que : $\boxed{2,2<b<2,3}$

2)a) On a : $-\frac{1}{3}<a<1$ et $2,2<b<2,3$ donc : $-\frac{1}{3}+2,2<a+b<1+2,3$

Donc : $-\frac{1}{3}+2,2<a+b<1+2,3$ c'est-à-dire :Donc : $\frac{5,6}{3}<a+b<3,3$

Donc : $\frac{56}{30}<a+b<3,3$ c'est-à-dire : $\boxed{\frac{28}{15}<a+b<3,3}$

2)b) On a : $a-b=a+(-b)$ et $-\frac{1}{3}<a<1$ et $2,2<b<2,3$ donc : $-2,3<-b<-2,2$

Donc : $-\frac{1}{3}+(-2,3)<a+(-b)<1+(-2,2)$

Donc : $\frac{-7,9}{3}<a-b<-1,2$ Donc : $\boxed{\frac{-79}{30}<a-b<-1,2}$

c) $A=(a+1)\times\frac{1}{a^2+a+2}$: On a : $-\frac{1}{3}<a<1$ donc : $-\frac{1}{3}+1<a+1<1+1$

Donc : $\frac{2}{3}<a+1<2$

On a : donc : $0\le a<1$ ou $-\frac{1}{3}\le a\le 0$

Donc : $0\le a^2<1$ ou $0\le -a\le\frac{1}{3}$

Donc : $0\le a^2<1$ ou $0\le a^2\le\frac{1}{9}$

Donc : $\boxed{0\le a^2<1}$ et on a : $-\frac{1}{3}+2<a+2<1+2$

Donc : $0\le a^2<1$ et on a : $\frac{5}{3}<a+2<3$

Donc : $\frac{5}{3}\le a^2+a+2<4$

Donc : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{a^2+a+2}<\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}<a+1<2$

Donc : $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\le(a+1)\times\frac{1}{a^2+a+2}<\frac{3}{5}\times 2$

Donc : $\boxed{\frac{1}{6}\le A<\frac{6}{5}}$

Exercice10 : Soient a et b deux réels tel que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le 1,2\times10^{-1}$

Corrigé : 1) $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$ et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le (2+b)(2+a)\le 16$ C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et on a : $-0.708\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\le-0.707$

Donc : $0.866-0.708\le\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le 0.867-0.707$

Donc : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$ et $0.16-0.158=2\times 10^{-3}$

Par suite : $0,16$ est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

$0,158$: Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ et on a : $0.158\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$

Donc : $0\le\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.16$ Par suite : $\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\le\frac{3}{4}\times 0.16=0.12$

Finalement : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le 0.12$

C'est-à-dire : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le 1,2\times 10^{-1}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien