Cours avec Exercices d'application avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB
Tronc commun Sciences BIOF
http:// www.xriadiat.com

Leçon : Les polynômes

Présentation globale

I) Définition d'un polynôme

II) Les polynômes et les opérations

III) La valeur absolue et propriétés La division par $x-a$ et factorisation de polynômes

I) Définition d'un polynôme

Activité : Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x , $x+3$ et $x+5$ avec x réel strictement positif. Soit *V(x)* le volume de ce parallélépipède

1) Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$

2) Calculer V(1) *et* V(2)*?*

*3) Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer :*V(1) *et* V(2) ?

1) Vocabulaire : L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3

On note $\deg V = 3$

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme V(x).

$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

15x est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

2) Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent : $P(x)$, $Q(x)$, ... Le degré du polynôme P , noté $\deg P$, est celui de son monôme de plus haut degré.

Exemple1 : Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés :

$$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}\ ;\ Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}\ ;\ R(x)=5|x|^2+4|x|-5\ ;$$

$$E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1\ ;\ F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$$

$$M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4\ ;\ N(x)=x^2+\frac{1}{x}x+3\ ;\ O(x)=4$$

Solution : $P(x)$ est un polynôme et $d^\circ P=3$

$Q(x)$ et $R(x)$ et $N(x)$ ne sont pas des polynômes

$M(x)$ Est un polynôme et $d^\circ M=4$

$O(x)$ Est un polynôme et $d^\circ O=0$

$E(x)$ Est un polynôme :

Si $a-1\neq 0$ c'est-à-dire : $a\neq 1$ alors $d^\circ E=4$

Si $a=1$ alors $d^\circ E=2$

$F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$ Signifie que : $F(x)=x^2-6x+9-20-4x^6+9+4x^6+2x^3$

Donc : $F(x)=2x^3+x^2-6x-2$ par suite : $d^\circ F=3$

Exemple2 : Développer ; Réduire et ordonner et déterminer le degré du polynôme suivant :

$P(x)=(2x-1)^3+3(x+1)(1-x)-2x^2(2x-5)$

Solution : $P(x)=(2x-1)^3+3(x+1)(1-x)-2x^2(2x-5)$

$P(x)=(2x)^3-3(2x)^2\times1+3(2x)\times1^2-1^3+3(1-x^2)-4x^3+10x^2$

$P(x)=8x^3-12x^2+6x-1+3-3x^2-4x^3+10x^2$

$P(x)=8x^3-4x^3-12x^2+10x^2-3x^2+6x-1+3$

$P(x)=4x^3-5x^2+6x+2$; Par suite : $d^\circ P=3$

Exercice1 : discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^2-m)x^3-(m^2-1)x^2+mx-1$

Solution : $P(x)=(m^2-m)x^3-(m^2-1)x^2+mx-1$

$m^2-m=0$ Signifie que : $m(m-1)=0$

Signifie que : $m-1=0$ ou $m=0$
Signifie que : $m=1$ ou $m=0$

- Si $m\neq1$ et $m\neq0$ alors : $m^2-m\neq0$ et par suite : $d^\circ P=3$
- Si $m=0$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(0^2-0)x^3-(0^2-1)x^2+0x-1$

c'est-à-dire : $P(x)=x^2-1$ et par suite : $d^\circ P=2$

- Si $m=1$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(1^2-1)x^3-(1^2-1)x^2+1x-1$

c'est-à-dire : $P(x)=x-1$ et par suite : $d^\circ P=1$

Exercice2 : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(0)=5$ donc $a\times0^2+b\times0+c=5$ par suite : $c=5$

On a $P(1)=5$ donc $a\times1^2+b\times1+c=5$ c'est-à-dire : $a+b+c=5$ donc $a+b+5=5$

Donc : $a+b=0$ ①

On a $P(-2)=3$ donc $a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=3$ c'est-à-dire : $4a-2b+5=3$

Donc $4a-2b=-2$ ②

Donc : on a le système suivant : $\begin{cases}4a-2b=-2\\a+b=0\end{cases}$ donc : $\begin{cases}4a-2b=-2\\b=-a\end{cases}$

Par suite : $4a+2a=-2$ donc : $6a=-2$

Donc : $a=-\frac{1}{3}$ donc : $b=\frac{1}{3}$ Alors : $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+5$

4) Egalité de deux polynômes :

Définition : Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P **=** Q si et $P(x)=Q(x)$ Pour tout x réel

Propriété : Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : (*) Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et $R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution : $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ Donc $\deg(Q)=3$

Donc : $P(x)=Q(x)$ car : $\deg(P)=\deg(Q)=3$ et les coefficients de leurs termes de même Degré sont égaux.

Mais $P(x)\neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Exercice3 : Soit les polynômes suivants : $P(x)=12x^4-36x^3+47x^2-30x+7$

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

Déterminer a ; b ; c sachant que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ si et seulement si $P(x)=Q(x)$ pout tout x

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)=2ax^4+2bx^3+2cx^2-3ax^3-3bx^2-3cx+ax^2+bx+c$

$Q(x)=2ax^4+(2b-3a)x^3+(2c-3b+a)x^2+(b-3c)x+c$

Donc : $\begin{cases} 2a=12 \\ 2b-3a=-36 \\ a-3b+2c=47 \\ b-3c=-30 \\ c=7 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} a=0 \\ b=-9 \\ c=7 \end{cases}$

On vérifie que : $a-3b+2c=47$ est vraie

Donc : $Q(x)=(2x^2-3x+1)(6x^2-9x+7)$

II) Les polynômes et les opérations

1) Activité : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants : $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer : $\deg(P\times Q)$ et $\deg(P)+\deg(Q)$

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Solution: I) 1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

On a: $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$

Donc : $P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$

On a: $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x$ $P(x)-Q(x)=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$ $3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x$

$3P(x)-2Q(x)=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$

$\deg(P)=3$; $\deg(Q)=4$; $\deg(P+Q)=4$; $\deg(P-Q)=4$

I) 2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

On a: $P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$

On a: $P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10$

$3P(x)-2Q(x)=5x^5-5x^2+19$

$\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$; $\deg(P+Q)=0$; $\deg(P-Q)=5$

II) 1) on a $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

$P(x)\times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$

$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2\times1+1=x^4-2x^2+1$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$P(x)\times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$

$\deg(P\times Q)=5$ $\deg(P)=4$; $\deg(Q)=1$

Donc $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ et $\deg(P^2)=2\deg(P)$

2) Résumé :

a) La somme de deux polynômes : Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$ tel que :

$(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(P+Q)\le\max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel : Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que :

$(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ et tel que : $(PQ)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$; $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

III) La division par $x-a$ et factorisation de polynômes

1) La division euclidienne d'un polynôme par $x-a$

Propriétés et définitions : a) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$

Alors il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tel que :

$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par : $x-a$ et $Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste.

b) Soit P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$.

On dit que a est racine du polynôme P si et seulement si $P(a)=0$

c) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$; a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x-a$.

Exemple : Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Vérifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Factoriser : $P(x)$

Solution :1) $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

Donc : 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) 1 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x-1$

En effectuant la division euclidienne de : $P(x)$ Par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & \text{x-1} \\ \cline{2-2} -\quad x^3-x^2 \quad\quad\quad & x^2 \ -x-6 \\ \cline{1-1} -x^2-5x+6 & \\ -\quad -x^2+x \quad & \\ \cline{1-1} -6x+6 & \\ -\quad -6x+6 & \\ \cline{1-1} \mathbf{0} & \end{array}$$

On trouve donc : $Q(x)=x^2-x-6$

Donc : $P(x)=(x-1)\left(x^2-x-6\right)$

Exercice4 : Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ montrer que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

On a $P(3)=2\times3^3-5\times3^2-4\times3+3=54-45-12+3=0$ donc 3est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2x^3-5x^2-4x+3} & \textbf{x-3} \\ \cline{2-2} +\ \mathbf{-2x^3+6x^2} \quad\quad\quad\quad & \mathbf{2x^2+x-1} \\ \cline{1-1} \mathbf{x^2-4x+3} & \\ \mathbf{-x^2+3x} \quad & \\ \cline{1-1} \mathbf{-x+3} & \\ \mathbf{x-3} & \\ \cline{1-1} \mathbf{0} & \end{array}$$

On trouve : $P(x)=(x-3)Q(x)$ ① et $Q(x)=2x^2+x-1$

3) On a : $Q(x)=2x^2+x-1$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1+8 = 9$

Donc : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$ par suite : $S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x)\geq 0$ On a $x_1=-1$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$ sont racines du polynôme $Q(x)$

Donc: le tableau de Signe:

x	$-\infty$ -1 $1/2$ $+\infty$
$Q(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Donc: $S=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x-3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+x-1$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=(2x-1)(x+1)$ par suite : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

6) On a : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

$P(x)=0$ Signifie : $(x-3)(2x-1)(x+1)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+1=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-1$ par suite : $S=\mathbb{R}-\left\{-3,-1,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)\succ 0$ Signifie: $(x-3)Q(x)\succ 0$:D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ -1	$-\frac{1}{2}$	3 $+\infty$	
$Q(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$P(x)$	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Par suite : $S=\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]3;+\infty[$

Exercice5 : Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$ 6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)\leq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$: $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}$ donc : $P(-1)=0$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$
$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$
$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$
$$=P(x)$$

3) a) $\Delta=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times1\times\sqrt{2}+1-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$: $\quad Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$ car : $\sqrt{2}-1>0$

On a $\Delta\succ0$ donc : $x_1=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Par suite: $S=\left\{\sqrt{2};1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{2}^2$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c'est à dire : $x=2$ et $x=1$ par suite : $S=\{1;2\}$.

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$: On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=1$ On a donc : $S=\left\{-1;1;\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq0$

$P(x)\leq0$ Signifie que : $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq0$

x	$-\infty$	-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$

Exercice6 : Soit : $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) Vérifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$

Alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) Vérifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$

5) En déduire que : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) Déterminer les réels a ; b *et* c tel que : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

7) En déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Solution :1) $P(0)=2\times 0^4-9\times 0^3+14\times 0^2-9\times 0+2=2\neq 0$

Donc 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) α racine du polynôme est $P(x)$

Signifie que : $P(\alpha)=0$

Signifie que : $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

On calcul $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)$?

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2}{\alpha^4}-\frac{9}{\alpha^3}+\frac{14}{\alpha^2}-\frac{9}{\alpha}+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2}{\alpha^4}-\frac{9\alpha}{\alpha^4}+\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}-\frac{9\alpha^3}{\alpha^4}+\frac{2\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2}{\alpha^4}$$

Et puisque $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

Donc : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

Donc : $\frac{1}{\alpha}$ Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) $P(2)=2\times 2^4-9\times 2^3+14\times 2^2-9\times 2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times 2^4-9\times 2^3+14\times 2^2-9\times 2+2=32-72+56-18+2=0$

Donc :2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

On trouve que : $P(x)=(x-2)\times\left(2x^3-5x^2+4x-1\right)$

5) On a 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $\frac{1}{2}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et puisque $P(x)=(x-2)\times Q(x)$ $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

Alors : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ or $\frac{1}{2}-2\neq 0$ donc : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par : $x-\frac{1}{2}$ on trouve : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

Donc : $a=2$ et $b=-4$ et $c=2$

7) On a : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$ et $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

Donc : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

On factorise aussi : $2x^2-4x+2$: On remarque que 1 est racine

En Effectuant la division euclidienne de $2x^2-4x+2$ par $x-1$

On trouve : $2x^2-4x+2(x-1)(2x-2)$

Finalement : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$P(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$ C'est-à-dire : $P(x)=(x-2)(2x-1)(x-1)^2$

Exercice7 : Soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-x-3$

1) Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-2}{P(x)}\geq 0$

Solution :1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 sont : -3 ; -1 ;1 ;3

2) S'il existe une racine $a\in\mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a)=0$

C'est-à-dire : $a^3+3a^2-a-3=0$

C'est-à-dire : $a\left(a^2+3a-1\right)=3$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 3

C'est-à-dire : $a\in\{-3;-1;1;3\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

On trouve seulement : $\begin{cases} P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-(-3)-3=-27+27+3-3=0 \\ P(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-(-1)-3=-1+3+1-3=0 \\ P(1)=1^3+3\times 1^2-1-3=1+3-1-3=0 \end{cases}$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -3 et -1 et 1

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a :-3 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+3)Q(x)$

Mais aussi on a : -1 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(-1)=(-1+3)Q(-1)=0$

C'est-à-dire : $Q(-1)=0$

C'est-à-dire : -1 est racine du polynôme $Q(x)$

C'est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x+1$

C'est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x)=(x+1)R(x)$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)R(x)$

Mais aussi on a : 1 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(1)=(1+3)(1+1)R(1)=0$

C'est-à-dire : $R(1)=0$

C'est-à-dire : 1 est racine du polynôme $R(x)$

C'est-à-dire : $R(x)$ est divisible par $x-1$

C'est-à-dire : $R(x)=(x-1)C(x)$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)(x-1)C(x)$ Avec $C(x)=c=1$ est une constante car $\deg P=3$

Donc : $P(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$

4) $\dfrac{2-x}{P(x)}\geq 0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$ Signifie : $x+3=0$ ou $x+1=0$ ou $x-1=0$

Signifie : $x=-3$ ou $x=-1$ ou $x=1$

$2-x=0$ Signifie : Signifie : $x=2$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2-x}{P(x)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]-3;-1\right[\cup\left]1;2\right]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

Que l'on devient un mathématicien