# Cours produit scalaire avec Exercices avec solutions

**PROF : ATMANI NAJIB**

**Tronc commun Sciences BIOF**

**http:// www.xriadiat.com**

# PRODUIT SCALAIRE

**Présentation globale**



## I) Le produit scalaire de deux vecteurs

### 1) Définitions :

**Définition1 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. et soient $A$ ; $B$ et $C$ trois points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

On appelle <u>produit scalaire</u> de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

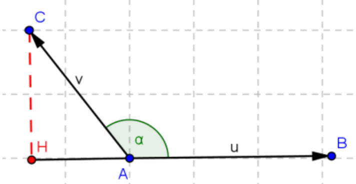
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$

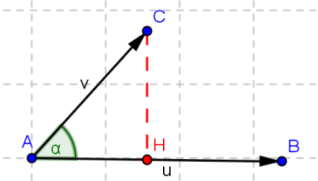
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$ alors :

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\cdot\overline{AB}$ c'est-à-dire :

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire

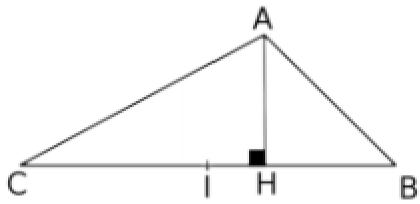



***Remarque :*** Soient $A$ ; $B$ ; $C$ et $D$ quatre points du plan

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overline{A'B'}\times\overline{CD}=\overline{AB}\times\overline{C'D'}$ avec : $A'$ ; $B'$ les projections orthogonales respectifs de $A$ ; $B$ Sur la droite $(CD)$ et $C'$ ; $D'$ les projections orthogonales respectifs de $C$ et $D$ sur la droite $(AB)$

**<u>Application :</u>** Considérons un triangle ABC tels que : BC = 6, I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a H ∈ [BI] et IH = 1.




Calculer : 1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ 2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

**Solution :**1) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ étant colinéaire et de même sens alors :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH$

Déterminons BH.

On a : $BH=BC-HC$ Or : $HC=HI+IC=3+1=4$ alors : $HC=4$

Ainsi : $BH=6-4=2$

Par conséquent : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH=6\times 2=12$

2)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CH}$ étant colinéaire et de sens contraire alors :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH} = -BC \times CH$

De ce qui précède on a : $HC = 4$

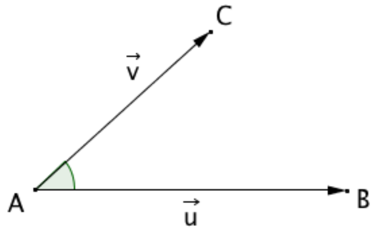
Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH} = -6 \times 4 = -24$ D'où : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -24$

**Définition2 :** Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ c'est la distance AB.

**Définition3 :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle <u>produit scalaire</u> de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

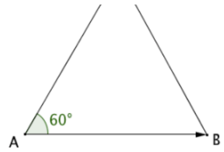



a) $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

<u>**Remarque :**</u> Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$




<u>**Exemple :**</u> Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} = a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

<u>**Attention :**</u> Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

Ecrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

<u>**Exercice1**</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

**Solution :** $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 3 \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ or $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{3}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

**2) propriétés :**

**Propriété1 :** Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

<u>**Démonstration :**</u>

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v};\vec{u}))$$
$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v};\vec{u}) = \vec{v}.\vec{u}$$

**Propriété2 :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$   2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$   Avec *k* un nombre réel.

**Propriété3 :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$   2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$   3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

<u>Démonstration : pour le 2) :</u> $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

## II. Produit scalaire et norme :

Soit un vecteur $\vec{u}$ , on a : $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u};\vec{u})=\|\vec{u}\|^2\times\cos 0=\|\vec{u}\|^2$ et $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$

On a ainsi : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

**Propriété1 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

<u>Démonstration : de la première formule :</u> $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

**Propriété2 :** Soit A, B et C trois points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

<u>Démonstration :</u> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

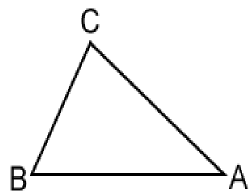
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\|\overrightarrow{CB}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

**<u>Exemple :</u>** Soit ABC un triangle tel que : $AB=2\sqrt{7}$ et $AC=4$ et $BC=5$

1)Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2)Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$




**Solution :** 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On en déduit, d'après la propriété que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2+4^2-5^2\right)=\frac{1}{2}\times 19=9,5$

2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left(2\sqrt{7}\right)^2+5^2-4^2\right)=\frac{1}{2}\times 37=18,5$

3) Calculons : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(5^2+4^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\times 13=6,5$

**<u>Exercice2</u>** : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{3}{2}$

Calculer :1) $A=(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})$ 2) $B=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$ 3) $C=(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $D=(3\vec{u}+2\vec{v})^2$

4) $E=\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $F=\|\vec{u}-\vec{v}\|$

**Solution :** 1) Calculons : $A=\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(2\vec{u}-3\vec{v}\right)$

$A=2\vec{u}.\vec{u}-3\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}.\vec{v}$

Donc : $A=2.\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}^2=2.\left\|\vec{u}\right\|^2-\vec{u}.\vec{v}-3\left\|\vec{v}\right\|^2=2\times3^2+\frac{3}{2}-3\times2^2$

Donc : $A=2\times9+\frac{3}{2}-12=\boxed{\frac{15}{2}}$

2) Calculons : $B=\left(\vec{u}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

$B=\left(\vec{u}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}-\vec{v}^2$

$B=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2=9-4=\boxed{5}$

c) Calculons : $C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$

$C=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=3^2-2\left(-\frac{3}{2}\right)+2^2$

$C=9+3+4=16$

Calculons : $D=\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2$

$D=\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2=9\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}^2=9\left\|\vec{u}\right\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+4\left\|\vec{v}\right\|^2$

$D=9\times3^2+12\left(-\frac{3}{2}\right)+4\times2^2=81-18+16=79$

4) a) Calculons : $E=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2=3^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)+2^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=9-3+4=10$

Donc : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=10$ et par suite : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{10}$

b) Calculons : $F=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$

On a : $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=16$ donc : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=16$ Donc : $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|=\sqrt{16}=4$

## III. Produit scalaire et orthogonalité

### 1) Vecteurs orthogonaux

**Propriété :** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

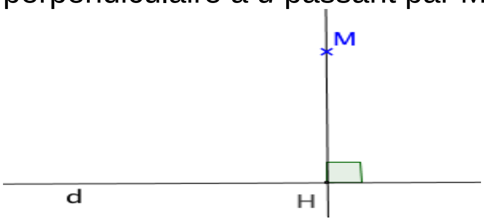
**Démonstration :** Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$

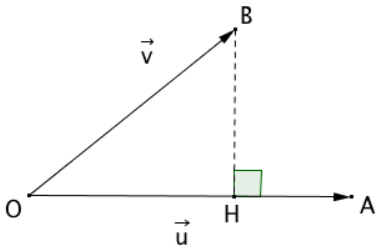
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

### 2) Projection orthogonale

**Définition :** Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



**Propriété :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$




**Démonstration :**

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}=0$.

**Exercice3** : ABCD est un carré de côté 2cm.

Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{CM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Ecrire $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ en en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ,
2) a) Calculer $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$
b) Que peut-on dire pour les droites (AN) et (BM) ?

**Solution : CONSEILS** : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$ car : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

2)a) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{DC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}\right)$ et, en développant :

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\frac{25}{16}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

On a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}=0$ car $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CD}^2=-CD^2=-2^2=-4$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=BC^2=2^2=4$ et

D'où : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

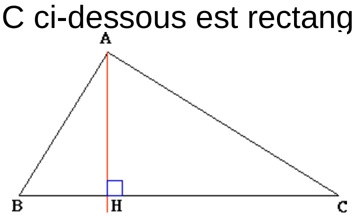
b) On a : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

Donc : $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, par suite : (AN) et (BM) sont perpendiculaires

## IV). APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

### 1)LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.



**Théorème :** Théorème de Pythagore

Si ABC est rectangle en A alors BC² = AB² + AC² (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)

Démonstration :

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$

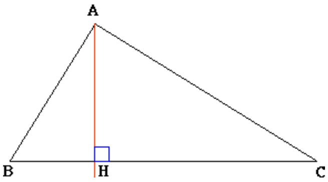
ABC est rectangle en A donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=0$

Donc $BC^2=AB^2+AC^2$

**AUTRE RESULTATS :**

$BA^2=BH\times BC$ et $CA^2=CH\times BC$ et $AH^2=HB\times HC$ et $AB\times AC=AH\times BC$

**Application :** Soit ABC un triangle rectangle en $A$ et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et $AH=2cm$ et $ABC=\frac{\pi}{3}$




Calculer $AB$ et $BH$ et $BC$

**Solution :a**) On a ABH un triangle rectangle en $H$

Donc : $\sin\left(ABC\right)=\frac{AH}{AB}$

Donc : $AB=\frac{AH}{\sin\left(ABC\right)}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

b) On a $AB^2=AH^2+HB^2$ car ABH un triangle rectangle en $H$

Donc : $AB^2-AH^2=HB^2$ c'est-à-dire : $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2-2^2=HB^2$

Donc : $\frac{16}{3}-2^2=HB^2$

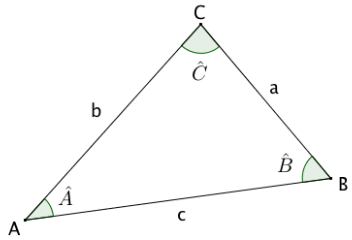
Donc : $HB^2=\frac{4}{3}$ par suite : $HB=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

c)On a $BA^2=BH\times BC$ donc: $BC=\frac{BA^2}{BH}$

Donc : $BC=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$

## 2) Théorème d'Al Kashi

**Théorème :** Dans un triangle ABC, on a avec les notations de la figure : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$




Démonstration : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos A$

et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$

Donc : $\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=AB\times AC\times\cos A$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

**Remarque :** si ABC un triangle quelconque on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\times AC\cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$

**Application :** Soit ABC un triangle tel que et $AB=5$ et $AC=8$ et $A=\frac{2\pi}{3}$ Calculer $BC$ et $\cos C$

**Solution :** a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos A$

Donc : $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times5\times8\cos\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire : $BC^2 = 25+64+40 = 129$ donc $BC = \sqrt{129}$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA\times CB\cos C$

Donc $2CA\times CB\cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$

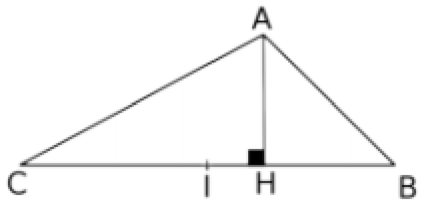
Donc $\cos C = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2CA\times CB}$ c'est-à-dire : $\cos C = \frac{64+129-25}{2\times8\times\sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$

**Exercice4** : Considérons un triangle ABC tels que : BC = 7, AB = 6 et AC= 5

1) a) Calculer : $\cos BAC$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).




Calculer : $BH$

**Solution :** 1) a) Calculons : $\cos BAC$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans $ABC$ nous obtenons :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\cos\left(BAC\right) = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

Donc : $\cos\left(BAC\right) = \frac{36+25-49}{2\times6\times5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos BAC = 6\times5\times\frac{1}{5} = 6$

Déduisons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 - 6 = BA^2 - 6 = 36 - 6 = 30$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

2) Calculons : $BH$

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30 > 0$

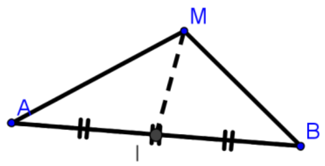
Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BH\times BC$

Donc : $\boxed{BH = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{30}{7}}$

## 3) Théorème de la médiane

**Propriété :** Soient deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$



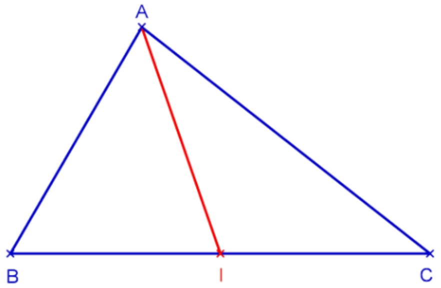

**Démonstration :**

$$MA^2+MB^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$$

$$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$$

**Exemple :** ABC est un triangle tel que AB=5 ; BC=8 et AC=7 et I est le milieu de [BC].




Calculer la longueur AI.

**Solution :** D'après le Théorème de la médiane dans $ABC$ nous obtenons :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$$

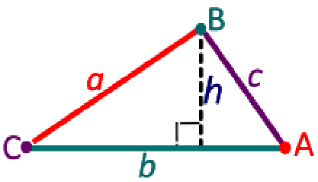
Donc : $25+49=2AI^2+\frac{64}{2}$ c'est-à-dire : $2AI^2=42$

Donc : $AI^2=\frac{42}{2}=21$ Alors : $\boxed{AI=\sqrt{21}}$

## 4) Surface d'un triangle et formule de sinus

**Propriétés :**

Dans un triangle ABC On a :




1) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ avec $S$ la surface du triangle ABC

2) $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$ (formule de sinus)

**Application1:** Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF=3$ et $EH=5$ et $FEH=\frac{3\pi}{4}$

Calculer la Surface du triangle $EFH$ et la Surface du parallélogramme $EFGH$

**Solution :** a) $S_{EFH}=\frac{1}{2}EF\times EH\sin E=\frac{1}{2}3\times 5\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{15}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

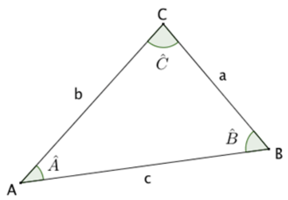
$$S_{EFH}=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

b) $S_{EFGH}=2\times S_{EFH}=2\times\frac{15}{4}\sqrt{2}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$

**Application2 :** Soit $ABC$ un triangle tel que : $a=BC=6$ et $A=30°$ et $B=73°$

Calculer $b$ et $c$

**Solution :** D'après la formule de sinus on a : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$




$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$ Donc $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$

Donc $b=12\sin 73°=11.47$

$\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$ Donc $c=12\sin 77°=11.69$

**Exercice5** : Soit $ABC$ un triangle tel que : $AB=1$
et $AC=\sqrt{2}$ et $CB=2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle $ABD$

4) Calculer : $AD$

5) Soit $I$ le milieu du segment $[BC]$ et $J$ le milieu du segment $[AC]$

Calculer : $AI$ et $BJ$

**Solution :** 1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans $ABC$ on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

Et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ donc : $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$ : on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ donc : $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$

Donc : $\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ si et seulement si : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3)
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$$

Donc : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ par suite : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

Et donc : $ABD$ est un triangle rectangle en $A$

4) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$ donc : $AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times 2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$$

Donc : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans $ABC$ on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

Signifie que : $3=2AI^2+2$ si et seulement si : $1=2AI^2$ donc : $AI^2=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans $ABC$ on a :

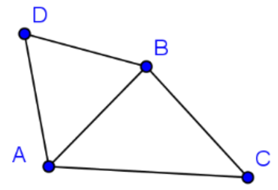
$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$ c'est-à-dire : $5=2BJ^2+1$

Signifie que : $BJ^2=2$ et par suite : $BJ=\sqrt{2}$

**Exercice6** : Soit $ABC$ un triangle isocèle et rectangle en $B$ tel que $AB=\sqrt{2}$
On construit à l'extérieur du triangle $ABC$ le triangle équilatérale $ABD$ (voir schéma)

1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$




2) Calculer : $AC$ et $DC$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) Vérifier que : $DAC=\frac{7\pi}{12}$

5) En déduire : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

**Solution : 1)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\hat{ABD}=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

• D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

$AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ Signifie que : $AC^2=4$ ssi $AC=2$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans $BCD$ on a : $DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$ par suite : $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans $ACD$ on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$ donc : $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

**Exercice7** : Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan tel que : $AB=4$

1) Déterminer et représenter l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

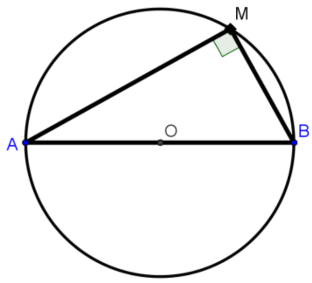
2) Déterminer et représenter l'ensemble $(F)$ des points $M$ du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

**Solution :** soit $M$ un point du plan

1) $M\in(E)$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$

Équivaut à : $(AM)\perp(BM)$

Équivaut à dire que : le point $M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$

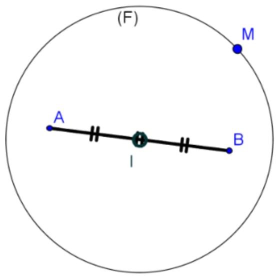



Par conséquent : l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tel que :
$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

2) $M\in(F)$ Équivaut à : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$ donc D'après le théorème de la médiane dans $MAB$ on a :

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{16}{4}$




$M\in(F)$ Équivaut à : $MI^2-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$ Équivaut à :

$MI^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$

Équivaut à : $MI=\frac{5}{2}$

Par conséquent : l'ensemble $(F)$ des points $M$ du plan est le cercle de centre $I$ et de rayon $R=\frac{5}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien