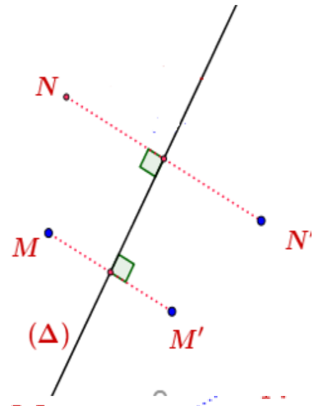
Cours avec Exercices avec solutions
PROF : ATMANI NAJIB
Tronc commun Sciences BIOF
http://www.xriadiat.com

Leçon : Les Transformations du plan

Présentation globale

I) symétrie axiale et symétrie centrale et translation et l'homothétie

1° symétrie axiale



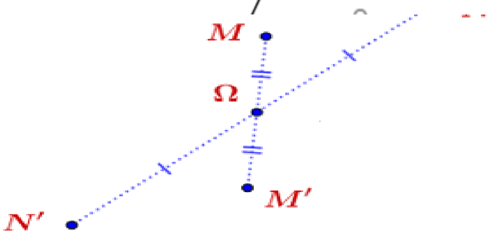
Définition : (Δ) est une droite du plan.La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : (Δ) est la médiatrice du segment [MM']

La symétrie axiale d'axe (Δ) est notée : $S_{(\Delta)}$

D'où : $S_{(\Delta)}(M)=M'$ si et seulement si (Δ) est la médiatrice du segment [MM'] : $S_{(\Delta)}(N)=N'$ $S_{(\Delta)}(M)=M'$

2° Symétrie centrale : Définition :

Ω est un point du plan



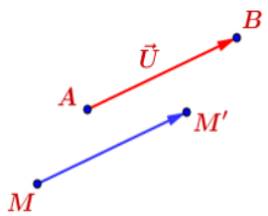
La symétrie centrale de centre Ω est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que :
$\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$

La symétrie centrale de centre Ω est notée : S_{Ω}

D'où : $S_{\Omega}(M)=M'$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$

3° Translation : Définition :

$\vec{u}$ est un vecteur du plan . La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$

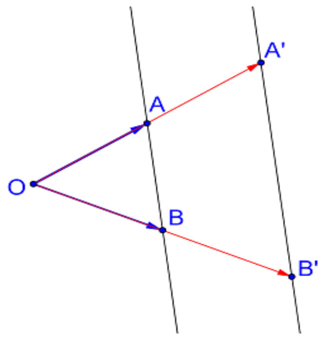


La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée : $t_{\vec{u}}$

D'où : $t_{\vec{u}}(M)=M'$ si et seulement si $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$

4° Homothétie

Définition1 : Ω est un point du plan et k un nombre réel.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que :
$\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$



L'homothétie de centre Ω et de rapport k est notée : $h_{(\Omega,k)}$

D'où : $h(M)=M'$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Exemple : soit L'homothétie de centre O et de rapport $k=2$ donc $h_{(O,2)}$

$h(A)=A'$ si et seulement si $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$

$h(B)=B'$ si et seulement si $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$

II. Propriété caractéristique de la symétrie centrale et la translation et l'homothétie

1° Propriété caractéristique de l'homothétie : Soit $k \in \mathbb{R}^*$

- Soit l'homothétie $h_{(\Omega,k)}$ et M et N deux points tel que : $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$

Alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'} = k\,\overrightarrow{\Omega N}$

D'où : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = -\overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega N'} = -k\,\overrightarrow{\Omega M} + k\,\overrightarrow{\Omega N} = k\left(-\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N}\right)$

$\overrightarrow{M'N'} = k\left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}\right) = k\,\overrightarrow{MN}$

- La réciproque est vraie c a d si T une transformation du plan P tel que :
  si T(M)=M' et T(N)=N' on a $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

On en déduit T est une homothétie

Propriété : Soit T une transformation du plan P et $k \in \mathbb{R}^*$
T est une homothétie si et seulement si T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tel que : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

2° Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Si on prend $k = -1$ on trouve la propriété caractéristique de la symétrie centrale

Propriété : Soit T une transformation du plan P
T est une symétrie centrale si et seulement si T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tel que : $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$

3° Propriété caractéristique de la translation : Soit la translation $t_{\vec{u}}$

- Si on a $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $t_{\vec{u}}(N) = N'$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{NN'}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

Donc $MM'N'N$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Si T une transformation du plan P tq a $T(M) = M'$ et $T(A) = A'$ tq $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

Alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ en déduit que T une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$

Propriété : Soit T une transformation du plan P
T est une translation si et seulement si T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tel que : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

III. Propriété des transformations

Définition ; Un point A est invariant si son image A' est lui-même ; c'est-à-dire A' = A.

Propriété1 : Dans une symétrie de centre I, seul le centre de symétrie, I est un point invariant
Dans une symétrie axial d'axe Δ , les points invariants sont les points de la droite Δ .
Dans une translation de vecteur $\vec{u} \neq 0$, il n'y a aucun point invariant.

Propriétés de la translation : Propriétés de conservation

- La Translation conserve l'alignement des Points et le coefficient d'alignement.
- La Translation conserve le Milieu.
- La Translation conserve la distance.
- La Translation conserve la mesure des angles.
- La Translation conserve le Parallélismes et l'orthogonalité.

Propriéts de La symétrie centrale :

Propriétés de conservation :

- La symétrie centrale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.
- La symétrie centrale conserve le milieu.
- La symétrie centrale conserve la distance.
- La symétrie centrale conserve la mesure des angles.
- La symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Propriéts de La symétrie axiale :

Propriétés de conservation

- La symétrie axiale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.
- La symétrie axiale conserve le milieu.
- La symétrie axiale conserve la distance.
- La symétrie axiale conserve la mesure des angles.
- La symétrie axiale conserve le parallélisme et l'orthogonalité

Propriéts de L'homothétie

Propriétés de conservation

- L'homothétie conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.
- L'homothétie conserve le milieu.
- L'homothétie ne conserve pas les distance.
- L'homothétie conserve la mesure des angles.
- L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

IV) images des figures par les transformations

1)Image d'une figure par une Translation:

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur.
- L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon.

2)Image d'une figure par une symétrie centrale:

- L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle. L'image d'une demi-droite par une symétrie centrale est une demi-droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment de même longueur.
- L'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon.

3)Image d'une figure par une symétrie axiale:

- L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite qui ne lui est pas parallèle que si la droite est parallèle à l'axe de la symétrie.
- L'image d'une demi-droite par une symétrie axiale est une demi-droite.
- L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur.
- L'image d'un cercle par une symétrie axiale est un cercle de même rayon.

4)Image d'une figure par une symétrie homothétie:

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par homothétie est une demi-droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment par homothétie est un segment.
- L'image d'un cercle par homothétie est un cercle.

Exercice 1 : $ABCD$ Un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu Du segment $[AD]$

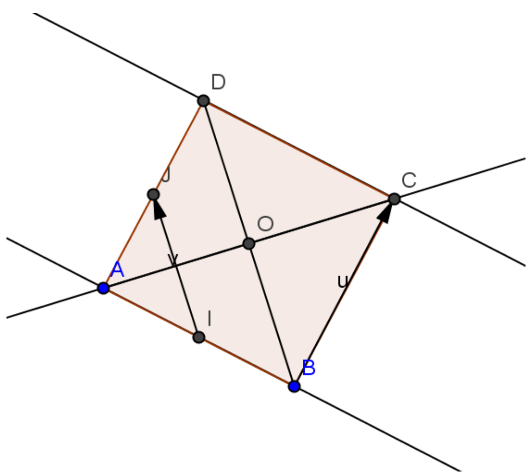
1) Faite une figure

2) Déterminer $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$ et $S_O((AB))$

3) Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$ et $S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}((OI))$

4) Déterminer $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

Solution :1) La figure



2) $S_O(A)=C$ Car $OA=OC$

$S_O(B)=D$ Car $OB=OD$

$S_O(O)=O$ Car O est invariant

On a $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ donc $S_O((AB))=(CD)$

Et on a $(AB)\parallel(CD)$ car L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

• $S_{(AC)}(B)=D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

• $S_{(AC)}(A)=A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants

• $S_{(AC)}(O)=O$ car $O\in(AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants

• On a $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$ donc $S_{(AC)}([AB])=[AD]$

• On a I le milieu du segment $[AB]$ et $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I)=J$

• On a $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ donc $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

4)

• On a $ABCD$ un losange donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

• On a ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Alors $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ donc $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• On a $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

Donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ et on a $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ par suite : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

Exercice 2 : $ABCD$ Un rectangle de centre O et $S_{(BD)}$ est la Symétrie axiale d'axe (BD)

Les points : A' , C' les images respectives des points A , C par $S_{(BD)}$

Montrer que : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Solution : On a : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ et O le milieu du segment $[AC]$

Donc $S_{(BD)}(O)=O'$ est aussi le milieu du segment $[A'C']$ car la symétrie axiale conserve le milieu

Or : $O\in(BD)$ donc : $S_{(BD)}(O)=O$

Donc : O le milieu du segment $[A'C']$ et de $[AC]$

Donc : les segments $[A'C']$ et de $[AC]$ ont le même milieu O

Par suite $AA'CC'$ est un parallélogramme

Et on a aussi : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ donc $AC=A'C'$ (car la symétrie axiale

Conserve les distances) Par conséquent : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Exercice3 : *Soient* trois points fixes A . B et C du plan

Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

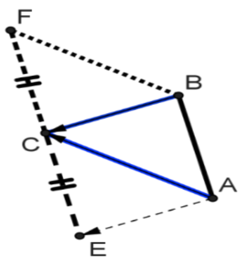
1) Montrer que : E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

2)a) Faire une figure

b) Représenter le point : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Et Montrer que : C est le milieu $[EF]$

Solution :1) On a : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ signifie que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$



Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire $BCEA$ est un parallélogramme

Par suite : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=E$

2)a) la figure

On a : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc :

$t_{\overrightarrow{AC}}(B)=F$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$ donc $ACFB$ est un parallélogramme par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ (1)

On a aussi : $BCEA$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CF}$ Par conséquent : C est le milieu $[EF]$

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

Soit I le milieu du segment $[CD]$ et J un point tel que : $ACJD$ est un parallélogramme

On considère la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ de vecteur $\overrightarrow{AD}$

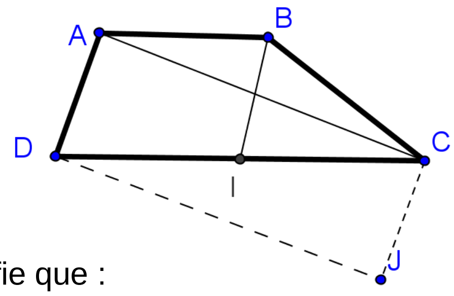
1) Déterminer les images des points A et C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) En déduire que : $(IJ)\parallel(BC)$

Solution : 1) Déterminons les images des points A et C Par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

• Déterminons $t_{\overrightarrow{AB}}(A)$?



Soit A' est l'image du point A par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

Cela signifie que : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire $A'=D$

Donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(A)=D$

• Déterminons $t_{\overrightarrow{AD}}(C)$?

Soit C' est l'image du point C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ cela signifie que :

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD}$

Et puisque : $ACJD$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CJ}$

Alors : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CJ}$ c'est-à-dire $C'=J$ donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

On a : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ et I le milieu du segment $[CD]$ donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}$ Par suite $ABID$ est un parallélogramme.

Donc : $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AD}$ et par suite : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) déduction que : $(IJ)\parallel(BC)$?

Puisque : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$ et $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$ d'après la propriété caractéristique de la translation on a :

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$ et par suite : $(IJ)\parallel(BC)$

Exercice 5 : *Déterminer* dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$

Solution: Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,-\frac{2}{3}\right)$

2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,\frac{2}{3}\right)$

3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ équivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$

4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$
Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$
Equivaut à : $k=-2$ donc $h(A,-2)$

Exercice 6 : $ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1) Faite une figure

2) Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$

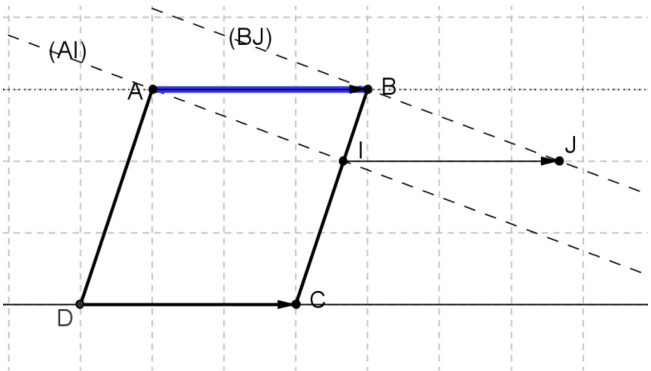
b) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4) Soit le point K tel que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$

b) Montrer que : $AI=\frac{1}{2}CK$

Solution :1) La figure



2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

On a : $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On a donc : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : on sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) on a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) on a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$
C'est-à-dire : $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$
Par suite : $k=-2$
4)a) $h(J)=K$?????
On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ donc : $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ Par suite : $h(J)=K$

4)b) On a : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{BJ}\right\|$ alors $\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=|-2|\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|$ c'est-à-dire : $CK=2BJ$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme donc $BJ=AI$

Donc $CK=2AI$ par suite : $AI=\frac{1}{2}CK$

Exercice7 : Soit deux points A et B du plan et soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$
1) Déterminer les points invariants par la transformation h
2)Montrer que : h est une homothétie et trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution : 1) Déterminons les points invariants par la transformation h
Soit Ω un point invariant par la transformation h
Ω un point invariant par la transformation h signifie que : $h(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega\Omega}=\vec{0}$
Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)+\vec{0}=\vec{0}$
Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Signifie que : $-\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$
Donc : le point invariant par la transformation h vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$
2)Montrons que : h est une homothétie
Soit M un point du plan et $h(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$
Équivaut à : $\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)-2\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)-\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{M'\Omega}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$
Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}+\left(\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}\right)-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ et puisque : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{A\Omega}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

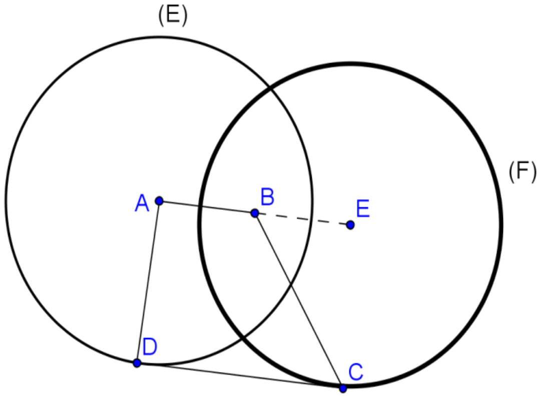
Cela veut dire que : h est une homothétie de centre Ω et de rapport : $k=\frac{1}{2}$

Exercice 8 : Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ et tels que les points A et B sont fixes et $AB=2$ et les points C et D sont variables avec : $AD=3$ et E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$
1) Déterminer l'ensemble (E) des points D
2) Déterminer l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)
3) Représenter les ensemble (E) et (F)

Solution : 1) Déterminons l'ensemble (E) des points D

On a : $D \in (E)$ signifie que : $AD = 3$

Et par suite l'ensemble (E) est le cercle de centre A est de Rayon : $r = 3$



2) déterminons l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

On a : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ cela signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(D) = C$

Et puisque l'ensemble (E) des points D est le cercle de centre A est de rayon $r = 3$

Alors (F) est l'image (E) par la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$

Par suite (F) est le cercle de centre $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)$ est de rayon $r = 3$

Or on a : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ cala signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(A) = E$

Par conséquent : (F) est le cercle de centre E est de rayon $r = 3$

3) Voir la figure

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien