PROF: ATMANI NAJIB **Cours : Equations – Inéquations - Systèmes** Tronc commun Sciences

Dans ce cours, on désigne par S l'ensemble des solutions

I. Equation du premier degré à une inconnue

1. Equations de forme $ax+b=0$ (rappel)

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

Toute égalité de la forme $ax+b=0;(a\neq 0)$ s'appelle une équation du premier degré à une inconnue.

- ***Résolution de l'équation*** $ax+b=0$
  - Si $a=0$ et $b=0$ alors $S=\mathbb{R}$
  - Si $a\neq 0$ et $b=0$ alors $S=\{0\}$
  - Si $a=0$ et $b\neq 0$ alors $S=\{\varnothing\}$
  - Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ alors $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2(x+2)=4\left(\frac{1}{2}x+1\right)$; $-3x+4=6\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$; $4(1-x)+2=0$; $5(1-x)-5=0$

2. Equations de forme $(ax+b)(cx+d)=0$ (rappel)

Propriété

Soient a,b,c et d des nombres réels ($a\neq 0$ et $c\neq 0$)

$(ax+b)(cx+d)=0$ Signifie que $ax+b=0$ ou $cx+d=0$ par conséquent $S=\left\{\frac{-b}{a},\frac{-d}{c}\right\}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(3x-1)(2-x)=0$; ; $(-3x-5)(x^2-9)=0$; $4(x-1)^2=25$

3. Equations de forme $\frac{ax+b}{cx+d}=0$;

Propriété :

Soient a,b,c et d des nombres réels ($a\neq 0$ et $c\neq 0$)

Pour résoudre l'équation $\frac{ax+b}{cx+d}=0$; on détermine la condition d'existence de $\frac{ax+b}{cx+d}=0$.

L'écriture $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ existe et bien définie si et seulement si $cx+d\neq 0$.

Autrement dit on détermine l'ensemble de définition de l'équation qu'on note D_E.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $(E):\frac{2x-1}{x-1}=0$

L'équation $(E):\frac{2x-1}{x-1}=0$ existe si et seulement si $x-1\neq 0$ c-à-d $x\neq 1$

Par conséquent $D_E=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$.

On résoudre dans D_E.

$\frac{2x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\in D_E$ donc $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\frac{x+3}{8-x}=0$; $\frac{x^2-9}{5x}=0$; $\frac{(x+1)(x-2)}{x^2-4}=0$ $\frac{x+4}{2x-1}=\frac{-2}{3}$

4. Equations de forme $|ax+b|=c$

Régle :

Soient a,b et c des nombres réels ($a\neq 0$). On considère l'équation suivante $(E):|ax+b|=c$.

* Si $c<0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution par conséquent $S=\varnothing$
* Si $c\geq 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions sont $\frac{c-b}{a}$ ou $\frac{-c-b}{a}$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $|2x-1|=3$ et $|x-5|=-1$

* $(E_1):|x-5|=-1$

On a $-1<0$ donc l''équation (E_1) n'admet pas de solution par conséquent $S=\varnothing$

* $(E_2):|2x-1|=3$

On a $3>0$ donc l''équation (E_2) signifie que $2x-1=3$ ou $2x-1=-3$

Par conséquent $x=2$ ou $x=-1$

D'où $S=\{-1;2\}$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\otimes|4x-5|=0$; $\otimes|3x-1|=14$; $\otimes|2x+1|+6=0$

II. Inéquations du premier degré à une inconnue

1. Définition

Soient a et b des nombres réels tels que $a\neq 0$

Toute inégalité de forme $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b>0$ ou $ax+b\leq 0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\otimes 3x-1\geq 0$; $\otimes 5x-2(x+3)>3x+1$; $\otimes -5x-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$

2. Signe du binôme $ax+b$ avec $a\neq 0$

Activité

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\otimes 2x-1\leq 0$; $\otimes 2x-1\geq 0$

2) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$		0	

Ce tableau s'appelle le tableau du signe de $2x-1$

3) Donner le tableau du signe de $-2x+1$

Propriété :

Le tableau du signe du binôme $ax+b$ est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe contraire de a	0	signe de a

3. Signe de $(ax+b)(cx+d)$ et $\frac{(ax+b)}{(cx+d)}(cx+d\neq 0)$

Règle :

Pour étudier le signe $(ax+b)(cx+d)$ et $\frac{(ax+b)}{(cx+d)}(cx+d\neq 0)$; on étudie le signe de chaque binôme puis on applique les règles du produit.

Exemple

* Donner le tableau du signe de $(2x-1)(2x+1)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-		-	0	+	
$2x+1$		-	0	+		+	
$(2x-1)(2x+1)$		+	0	-	0	+	

* Donner le tableau du signe de $\frac{2x-1}{2x+1}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-		-	0	+	
$2x+1$		-	0	+		+	
$\frac{2x-1}{2x+1}$		+	||	-	0	+	

Application :

1) Poser le tableau du signe de $\frac{3x-1}{2x+3}$ et $\left(\frac{1}{2}x+3\right)(-x+2)$
2) Résoudre les inéquations $\left(\frac{1}{2}x+3\right)(-x+2)\leq 0$ et $\frac{3x-1}{2x+3}>0$

III. Equations et inéquations du deuxième degré à une inconnue.

1. Définitions :

Soient a,b et c des nombres réels avec $a\neq 0$

* Toute égalité de forme $ax^2+bx+c=0$ s'appelle équation du deuxième degré à une inconnue.
* Le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation ou bien du trinôme ax^2+bx+c.
* Toute inégalité de forme $ax^2+bx+c\leq 0$ ou $ax^2+bx+c<0$ ou $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c\geq 0$ s'appelle inéquation du deuxième degré à un inconnue.

Exemples :

✓ $2x^2-3x+1=0$ est une équation du deuxième degré à une inconnue.
✓ $x^2-2x+5\geq 0$ est une inéquation du deuxième degré à une inconnue.

2. Résolution de l'équation du deuxième degré à une inconnue.

Propriété :

Soient a,b et c des nombres réels avec $a\neq 0$

Pour résoudre l'équation $(E): ax^2+bx+c=0$ on calcule $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation puis on étudie son signe.

• Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions et on écrit $S=\varnothing$

• Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une solution unique qui est $x=\frac{-b}{2a}$ et on écrit $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

• Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distincts x_1 et x_2 tels que $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on écrit $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $x^2 - 3x + 2 = 0$

On a $\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions distincts x_1 et x_2 tels que :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$

D'où $S = \{1;2\}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$2x^2 + 2x - 12 = 0$; $5x^2 - 4x + 2 = 0$; $3x^2 - 4x = 0$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$; $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

⇨ **Somme et produit des solutions de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété :

Si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors on a

$$\otimes x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad \otimes x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Application :

1) Sachant que 1 est une solution de l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Déterminer la deuxième solution de cette équation.

2) Résoudre le système suivant : $(S): \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 12 \end{cases}$

3. Factorisation du trinôme $p(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété :

Soient a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

• Si $\Delta < 0$ alors $p(x)$ n'admet pas de factorisation

• Si $\Delta = 0$ alors la factorisation de $p(x)$ est $p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et on écrit $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

• Si $\Delta > 0$ alors la factorisation de $p(x)$ est $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Application

Factoriser les trinômes suivants :

$3x^2 - 4x + 4$; $4x^2 + 3x - 1$; $x^2 - x + \frac{1}{4}$

4. Inéquations du deuxième degré à une inconnue

⇨ ***Signe du trinôme*** $ax^2 + bx + c$

Propriété :

Soient a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

• Si $\Delta < 0$ alors tableau du signe de $p(x)$ est :

x	$-\infty$ $+\infty$
$p(x)$	signe de a

• Si $\Delta = 0$ alors le tableau du signe de $p(x)$ est :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$p(x)$	signe de a	0	signe de a

• Si $\Delta > 0$ alors le tableau du signe de $p(x)$ est : $(x_1 < x_2)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$p(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

Constatation :

Pour l'inéquation du deuxième degré, en utilisant le tableau du signe.

Application

1) Donner le tableau du signe des trinômes suivants :

$p(x) = 2x^2 + 5x + 3$; $Q(x) = 16x^2 + 8x + 1$; $R(x) = -3x^2 + x - 5$; $s(x) = x^2 - 5x + 4$

2) Déduire les solutions des inéquations $p(x) < 0$; $Q(x) > 0$; $R(x) \leq 0$ et $S(x) \geq 0$

IV. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

1. Equation du premier degré à deux inconnues

Définition

Soient a, b et c des nombres réels avec $(a,b) \neq (0;0)$

Toute égalité de la forme $ax + by + c = 0$ s'appelle une ***équation du premier degré à deux inconnues.***

Le couple $(x_0; y_0)$ est une solution de l'équation si et seulement si $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Application

On considère l'équation suivante : $(E): 3x + 2y - 1 = 0$

Parmi les couples suivants, déterminer ceux qui sont les solutions de l'équation (E):

$$(0;1) \quad ; \quad (1;-1) \quad ; \quad (-1;2) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2};3\right)$$

2. Système de deux équations du premier à deux inconnues

Activité

Résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ -5x + y = 7 \end{cases}$

Définition et propriété :

Etant donner un système (S) comme suit $(S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, a', b, b', c et c' sont des nombres réels.

• Le nombre $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ s'appelle le déterminant du système (S).

• Si $D \neq 0$ alors le système (S) admet une solution unique qui le couple (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{cb' - c'b}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac' - a'c}{D}$$

- Si $D = 0$ et $D_x = 0$ ***<u>et</u>*** $D_y = 0$ alors le système (S) admet une infinité de solution.
- Si $D = 0$ et $D_x \neq 0$ ***<u>ou</u>*** $D_y \neq 0$ alors le système (S) n'admet pas de solution.

<u>Application</u>

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

3) Déduire les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{y} = 1 \\ -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2|1-x| + \dfrac{3}{y} = 1 \\ -|1-x| + \dfrac{1}{y} = -3 \end{cases}$$